

Matemáticas IV

Cuaderno de actividades de
aprendizaje

Bachillerato general

Cuarto semestre

Matemáticas IV. Cuarto semestre
Cuaderno de actividades de aprendizaje

©Secretaría de Educación Pública. México, octubre 2014.
Subsecretaría de Educación Media Superior. Dirección General del Bachillerato DCA, DSA
ISBN: En trámite. Derechos Reservados

PRESENTACIÓN

Dentro del marco de la Reforma Educativa en la Educación Básica y Media Superior, la Dirección General del Bachillerato incorporó en su plan de estudios los principios básicos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), cuyos propósitos son consolidar la identidad de este nivel educativo en todas sus modalidades y subsistemas, lo que que permita, además, una educación pertinente para los estudiantes que les posibilite establecer una relación entre la escuela y su entorno, acorde con el contexto social, histórico, cultural y globalizado en el que actualmente vivimos.

La asignatura de Matemáticas IV se incluye dentro del campo de conocimiento fisico-matemático. Entre los propósitos formativos de este campo se encuentran el desarrollo de conocimientos, habilidades y actitudes que te permitan interpretar de manera reflexiva y crítica el quehacer científico, valorar su importancia actual y futura, así como tomar conciencia del impacto social, económico y ambiental del desarrollo tecnológico.

El estudio de esta asignatura, mediante el desarrollo de conceptos, métodos y procesos lógicos, te permitirá adquirir los elementos básicos para efectuar el análisis de la relación funcional entre dos variables, indispensable para la explicación de fenómenos y la resolución de problemas en distintos campos del conocimiento.

El estudio de las Matemáticas te brinda la oportunidad de desarrollar diversas formas de pensamiento y diferentes tipos de razonamiento, y a utilizar distintos lenguajes y formas de representación simbólica, útiles para tu desarrollo y madurez intelectual, así como para la comprensión e interpretación de tu realidad personal y social. Al cursar la asignatura Matemáticas I, aprendiste a transitar de las operaciones numéricas, de la Aritmética al lenguaje general del Álgebra; en Matemáticas II incorporaste el estudio de los conocimientos geométricos; y en Matemáticas III conjugaste los aspectos anteriores mediante el estudio de la Geometría Analítica, es decir, aprendiste a transitar de las formas algebraicas a las representaciones geométricas y viceversa.

Al estudiar los conceptos de variación y aproximación ligados a la idea de función, la asignatura Matemáticas IV tiene entre sus propósitos desarrollar en ti un pensamiento flexible al constatar que la Matemática también admite el titubeo, el error y la aproximación, además de la formalidad, el rigor y la exactitud; posibilitará que desarrolles distintas formas de comunicación oral y escrita, expresando tus ideas mediante diversas representaciones gráficas o interpretando y describiendo procesos; utilizarás el pensamiento crítico al elaborar gráficas e identificar las diferentes formas de variación funcional al modelar situaciones; valorarás la utilidad del trabajo colaborativo en equipos y en el grupo, lo mismo que la importancia del respeto por las opiniones de los demás al participar en actividades grupales y, por último, desarrollarás una actitud de aprecio hacia el trabajo científico, particularmente de la Matemática, al aplicar las competencias para la modelación y resolución de problemas en diversos ámbitos.

En el bloque I aprenderás cómo se establecen las características matemáticas que definen las relaciones entre dos magnitudes, enfatizando las de carácter funcional. En el bloque II se distinguen y describen diferentes tipos de funciones matemáticas, así como operaciones y transformaciones algebraicas y geométricas entre ellas. En los bloques III, IV y V se realiza un estudio comparativo de las funciones polinomiales hasta el grado cuatro, se profundiza el análisis de las características de los modelos lineales y cuadrático, y se desarrollan procedimientos numéricos, algebraicos y geométricos para la obtención de ceros polinomiales. En el bloque VI se revisa el comportamiento de las funciones racionales y la existencia de posibles asíntotas. En los bloques VII y VIII se estudian, respectivamente, las funciones exponencial y logarítmica y las funciones periódicas.

A lo largo del Cuaderno podrás encontrar señaladas, a través de viñetas, estrategias de organización del trabajo o de evaluación como los siguientes:



Trabajo en pareja



Trabajo en equipo



Trabajo en grupo



Ideas o sugerencias

Coevaluación



Autoevaluación



Potafolio de evidencias



Para facilitar su manejo, todos los Cuadernos de actividades de aprendizaje están estructurados a partir de cuatro secciones en cada bloque de aprendizaje:

¿Qué voy a aprender? Se describe el nombre y número de bloque, las unidades de competencia a desarrollar, así como una breve explicación acerca de lo que aprenderás.

Desarrollando competencias. En esta sección se incluyen las actividades de aprendizaje para desarrollar las competencias señaladas en el programa de estudios, para lo cual es necesario tu compromiso y esfuerzo constantes por aprender, ya que se implementan actividades que tendrás que ir realizando a lo largo del curso: en forma individual, en binas o parejas, en equipos o en forma grupal. Dichas actividades van enfocadas a despertar en ti el interés por investigar en diferentes fuentes, para que desarrolles habilidades y destrezas que propicien tu aprendizaje.

¿Qué he aprendido? Aquí te presentamos actividades de consolidación o integración que te permitirán verificar cuál es el nivel de desarrollo de las competencias que posees en cada bloque de aprendizaje.

Quiero aprender más. En esta sección, se le da importancia a la consulta de diversas fuentes de información actualizadas para complementar y consolidar lo aprendido. Por ello encontrarás varias sugerencias de estos materiales, los cuales serán el medio a través del cual podrás investigar y descubrir otros asuntos y tópicos por aprender.

Como podrás darte cuenta, acabamos de presentarte un panorama general de la asignatura, el enfoque constructivista y las características de los Cuadernillos de Actividades de Aprendizaje. Ahora sólo falta que tú inicies el estudio formal de Matemáticas III, para lo cual te deseamos:

¡MUCHO ÉXITO!

CONTENIDO

	BLOQUE I	6
Reconoce y realiza operaciones con distintos tipos de funciones		
	BLOQUE II	17
Aplica funciones especiales y transformaciones de gráficas		
	BLOQUE III	29
Emplea funciones polinomiales de grado cero, uno y dos		
	BLOQUE IV	37
Emplea funciones polinomiales de grados tres y cuatro		
	BLOQUE V	42
Emplea funciones polinomiales factorizables		
	BLOQUE VI	50
Emplea funciones racionales		
	BLOQUE VII	60
Aplica funciones exponenciales y logarítmicas		
	BLOQUE VIII	69
Emplea funciones periódicas		



¿Qué voy a aprender?

BLOQUE I

Reconoce y realiza operaciones con distintos tipos de funciones

UNIDAD DE COMPETENCIA

Construye e interpreta modelos algebraicos y gráficos, aplicando relaciones funcionales entre magnitudes para representar situaciones y resolver problemas teóricos o prácticos de su vida cotidiana y escolar, que le permitan comprender y transformar su realidad. Contrasta los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos funcionales en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen. Interpreta diagramas y textos que contienen símbolos propios de la notación funcional.

Hay muchas situaciones que se representan en la práctica donde el valor de una cantidad depende del valor de otra. En particular, el salario de una persona puede depender del número de horas trabajadas, la producción total de una fábrica puede depender del número de máquinas que se utilicen, el volumen del espacio ocupado por un gas a presión constante depende de la temperatura absoluta del gas, la resistencia de un cable conductor de energía eléctrica de longitud fija depende del diámetro, entre otros ejemplos.

En este primer bloque reconocerás una relación o una función a partir de su descripción numérica, gráfica o algebraica. Obtendrás el dominio y el rango de una relación o función en representaciones diversas.

Obtendrás la imagen de un elemento del dominio a partir de la regla de correspondencia. Determinarás el tipo de función con que se está trabajando y utilizarás sus características específicas. Resolverás operaciones con funciones y utilizarás la noción de función en situaciones cotidianas relacionadas con magnitudes.



**Relación y función**

Las magnitudes que caracterizan un fenómeno dado pueden quedar completamente determinadas por los valores de otras. Estas interdependencias fueron las que dieron origen al concepto de función, porque gran parte de los fenómenos que se observan en la naturaleza se pueden relacionar entre sí a través de correspondencias.

En las fuentes de información a tu alcance, investiga de manera individual los siguientes conceptos y escríbelos donde corresponde.

Relación	
Función	
Dominio	
Rango	
Regla de correspondencia	
Variable independiente	
Variable dependiente	
Prueba de la recta vertical	

Toma en cuenta que todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones.

BLOQUE UNO

Se tienen cuatro maneras posibles para representar una función o una relación:

- Verbalmente (con una descripción en palabras).
- Numéricamente (con una tabla de valores).
- Visualmente (con una gráfica).
- Algebraicamente (con una forma explícita).



Formen equipos de trabajo y expliquen mediante un mapa conceptual o cuadro sinóptico, las principales características y diferencias de una función y una relación. Mencionen cómo se obtiene el dominio y rango de una función. Una vez concluido el mapa, compartan puntos de vista con el resto del grupo, con la finalidad de complementar sus respuestas y enriquecer sus competencias.

Formen equipos y contesten las siguientes preguntas concernientes a funciones y relaciones.

1. Observa el siguiente conjunto de pares ordenados $A = \{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)\}$

¿Es función o relación? _____

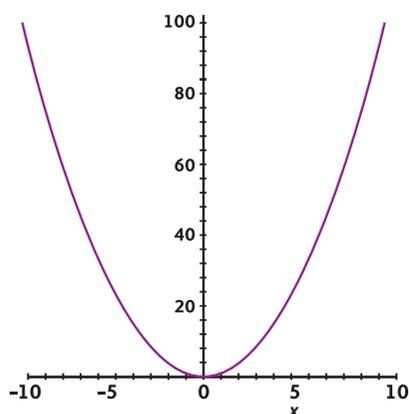
¿Por qué? _____

¿Cuál es su dominio? _____

¿Cuál es su rango? _____

¿Qué tipo de representación tiene? _____

2. Dada la siguiente gráfica



¿Es función o relación? _____

¿Por qué? _____

¿Cuál es su dominio? _____

¿Cuál es su rango? _____

¿Qué tipo de representación tiene? _____

3. Toma en cuenta la siguiente tabla y contesta.

Nombre	Edad
Alberto	17
Clarissa	16
Diana	19
Ernesto	17
Fabiola	16
Karen	19
Manuel	15

¿Es función o relación? _____

¿Por qué? _____

¿Cuál es su dominio? _____

¿Cuál es su rango? _____

¿Qué tipo de representación tiene? _____

4.- De acuerdo con la siguiente expresión algebraica, contesta:

$$y = x + 3$$

¿Es función o relación? _____

¿Por qué? _____

¿Cuál es su dominio? _____

¿Cuál es su rango? _____

¿Qué tipo de representación tiene? _____

Al finalizar, de manera aleatoria, seleccionen a alguno(a) de sus compañeros(as) para que vaya anotando las respuestas en el pizarrón; recuerden que pueden participar activamente complementando, en caso de ser necesario, las respuestas.

BLOQUE UNO

Clasificación de funciones



Las funciones pueden clasificarse de diversas maneras. En parejas investiguen cada una de las siguientes clasificaciones y anoten lo que se les pide.

Tipo de función	Características	Representación algebraica (ejemplo)	Representación gráfica (ejemplo)
Algebraica			
Trascendentes			
Contínuas			
Discontínuas			
Inyectiva (uno-uno)			
Suprayectiva (sobreyectiva)			
Biyectiva (biunívocas)			



Al finalizar, en plenaria, comparte la información elaborada en la actividad anterior y, a través de una lluvia de ideas, elaboren una definición grupal, de cada uno de los conceptos.

Álgebra de funciones

Se pueden combinar dos funciones f y g para formar nuevas funciones mediante la adición, sustracción, multiplicación y división de los valores de una función. Por ejemplo, si tenemos las funciones:

$$f(x) = 2x + 1 \text{ y } g(x) = x^2 + 2$$

Podemos formar una nueva función con la adición

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 1 + x^2 + 2 = x^2 + 2x + 3$$

De donde además podemos encontrar su dominio, el cual estaría definido por la intersección de los dominios de las funciones originales; así el dominio de la nueva función estaría dado por todos los números reales.

Formen equipos y encuentren las nuevas funciones que se obtienen de la sustracción, multiplicación y división, usando las dos funciones del ejemplo anterior. Al terminar, comparen sus repuestas con el resto del grupo.



Sustracción

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) =$$

Multiplicación

$$(fg)(x) = f(x)g(x) =$$

División

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} =$$

Existe otra manera de combinar dos funciones para obtener una nueva función. El procedimiento se llama composición, porque la nueva función se compone de las dos funciones originales.

Dadas dos funciones f y g , se define como la composición de la función f con la función g , a la función denotada por $f \circ g$ (léase f composición g), cuya regla de correspondencia es:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

BLOQUE UNO

Para obtener la regla de correspondencia de la función $f \circ g$, según la definición anterior, basta con sustituir la función g en la variable independiente de la función f .

Así, por ejemplo, sean las funciones $f(x) = 4x^2 - 1$ y $g(x) = x$, entonces, la regla de la función $f \circ g$ se obtiene mediante la siguiente sustitución.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] \text{ Por lo que}$$

$$(f \circ g)(x) = f[\sqrt{x}], \text{ entonces,}$$

$$(f \circ g)(x) = 4x - 1$$



De acuerdo con lo anterior, en parejas escriban en el paréntesis la letra que corresponda a la regla de correspondencia de la composición indicada.

$$f(x) = x^2 + 1 \quad g(x) = x \quad h(x) = \frac{1}{x-1}$$

1. $(f \circ g)(x) = \dots\dots(\quad)$

a) $\sqrt{x^2 + 1}$

2. $(g \circ h)(x) = \dots\dots(\quad)$

b) $x + 1$

3. $(h \circ g)(x) = \dots\dots(\quad)$

c) $\frac{1}{\sqrt{x} - 1}$

4. $(g \circ f)(x) = \dots\dots(\quad)$

d) $\sqrt{x^2 + 2}$

5. $(f \circ h)(x) = \dots\dots(\quad)$

e) $\frac{1}{x}$

f) $\frac{1}{\sqrt{x} - 1}$

g) $\sqrt{x + 1}$



Una vez que tengan elaborada su actividad, intercámbienla con sus compañeros de clase, de tal manera que cada pareja revise una distinta a la que elaboró.

Modelado de funciones

Un modelo matemático describe un hecho o fenómeno del mundo real, como las ondas que se crean en un estanque al caerle una piedra o calcular el nivel de lluvia que ha caído en determinado tiempo y, además, nos permite entenderlos de una mejor manera.

La mayoría de las funciones describen comportamientos de fenómenos o características de problemas que involucran a múltiples variables. Sin embargo, muchas veces existen formas de expresar todas las variables en términos de una sola para simplificar su análisis.

El proceso de modelado de funciones es el siguiente:

1. Leer claramente el problema e identificar la función buscada.
2. Hacer un dibujo que muestre las características por modelar.
3. Anotar los datos del problema y establecer las fórmulas que se conocen.
4. Expresar todas las variables en términos de la variable pedida a través de un manejo algebraico.
5. Expresar el comportamiento de la función en términos de la variable pedida.

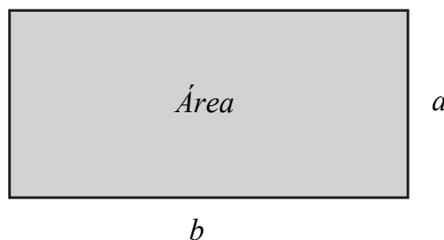
Es importante mencionar que un modelo matemático no es completamente exacto con problemas de la vida real; de hecho, se trata de una idealización.

Hay una gran cantidad de funciones que representan relaciones observadas en el mundo real. Los siguientes ejemplos muestran algunos casos típicos de modelaciones a través de funciones. Formen equipos de trabajo y encuentren una función que nos ayude a modelar el problema propuesto.



1. Expresar el área A de un terreno rectangular como función de la base b , si se sabe que su perímetro es de 100 cm.

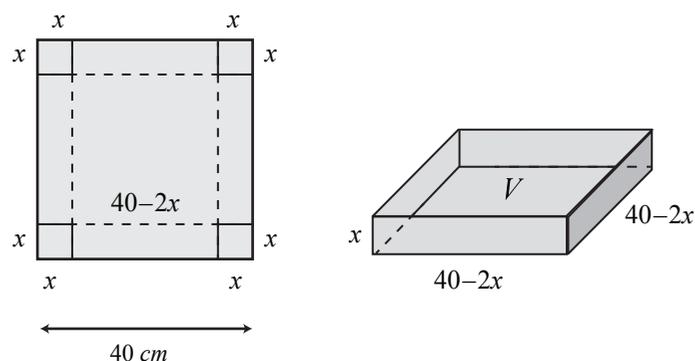
Perímetro = 100 cm



BLOQUE UNO

2. Se dispone de una cartulina cuadrada con 40 cm de lado y se quiere hacer una caja sin tapa recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando sus lados. Expresa el volumen de la caja en función del lado del cuadrado recortado x .

Haciendo una figura, se tiene:



Una vez finalizada la actividad anterior, elaboren sus conclusiones, mismas que van a presentar al resto del grupo; comenten sus diferencias para enriquecer el tópico revisado.



Fuentes de información

BÁSICA

- Barnett, R. (2000). *Precálculo: funciones y gráficas* (4a.). México: McGraw Hill Interamericana.
- Larson, R. (1996). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.
- Leithold, L. (2000). *Matemáticas previas al cálculo*. (3a. ed.). México: Oup-Harla.
- Ortiz, F. (2005). *Matemáticas IV. Bachillerato General*. México: Publicaciones Cultural.
- Ruiz J. (2005). *Precálculo: funciones y aplicaciones. Matemáticas IV*. México: Publicaciones Cultural.
- Stewart, J. (2000). *Precálculo*. México: International Thomson Editores.
- Sullivan, M. (1997). *Precálculo*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

ELECTRÓNICA

- *Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo*. Disponible en <http://dieumsnh.qfb.umich.mx/DIFERENCIAL/funciones.htm> [Consulta: 11/12/2014]

¿Qué he aprendido?



Formen equipos de trabajo y de cada función que les presentamos a continuación encuentren la operación indicada. Determinen dominio, rango, su gráfica y clasifíquenlas como continuas, discontinuas, inyectivas, suprayectivas o biyectivas.

$$f(x) = x^2 ; g(x) = -2x + 5$$

- a) $f+g$
- b) $f-g$
- c) fg
- d) f/g
- e) $f \circ g$
- f) $g \circ f$

Una vez que terminen, preséntenlos ante el resto del grupo a manera de exposición. Utilicen material de apoyo para una mejor presentación y en plenaria comenten sus opiniones acerca del trabajo que realizaron sus compañeros; recuerden que es un ejercicio de retroalimentación para mejorar el desempeño académico de cada uno.

Asignen 3 puntos si consideran que fue *excelente*, 2 puntos si fue *bueno* y un punto si fue *deficiente*.

Áreas de Mejora	Puntos
Uso correcto de términos y conceptos.	
Claridad en la presentación del ejercicio asignado.	
Manejo de expresiones matemáticas.	
Elaboración de material didáctico.	
Participación de todo el equipo.	

Si obtuvieron:

13 a 15 puntos: ¡Muy Bien! Continúen con ese aprovechamiento y aprendizaje que han obtenido hasta el momento.

10 a 12 puntos: ¡Bien! Han conseguido un nivel de aprendizaje aceptable, esfuércense un poco más y obtendrán el máximo de su aprovechamiento.

Menos de 10 puntos: ¡Adelante! Necesitan dedicar más tiempo de estudio a los tópicos presentados en el bloque; concéntrense en los puntos básicos para que puedan desarrollar posteriormente los más complejos.



Quiero aprender más

Historia de las funciones

Mientras que el Cálculo diferencial e integral surgió en el siglo XVII, el concepto de *función* vino a conocerse un siglo después, y el límite, entendido de una manera formal y rigurosa, sólo a finales del siglo XIX. Esto difiere de la forma como se presenta actualmente el Cálculo, donde primero se enseñan funciones, luego límites y finalmente derivadas o integrales. En la obra *Introductio in Analysis Infinitorum*, Leonhard Euler intenta dar por primera vez una definición formal del concepto de función al afirmar que: Una función de cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera por esa cantidad variable y por números o cantidades constantes”. Como puede observarse, esta definición difiere de la que actualmente se conoce, pues siete años después, en el prólogo de las Instituciones, cálculo diferencial, afirmó: “Algunas cantidades en verdad dependen de otras; si al ser combinadas las últimas las primeras también sufren cambio, entonces las primeras se llaman funciones de las últimas. Esta denominación es bastante natural y comprende cada método mediante el cual una cantidad puede ser determinada por otras. Así, si x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x en cualquier forma están determinadas por x y se les llama funciones de x ”.

En la historia de las Matemáticas se dan créditos al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) por precisar el concepto de función, así como por realizar un estudio sistemático de todas las funciones elementales, incluyendo sus derivadas e integrales; sin embargo, el concepto mismo de función nació con las primeras relaciones observadas entre dos variables, hecho que seguramente surgió desde los inicios de la Matemática en la humanidad, con civilizaciones como la babilónica, la egipcia y la china.

Antes de Euler, el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650) mostró en sus trabajos de Geometría que tenía una idea muy clara de los conceptos de “variable” y “función”, realizando una clasificación de las curvas algebraicas según sus grados, y reconociendo que los puntos de intersección de dos curvas se obtienen resolviendo, en forma simultánea, las ecuaciones que las representan.

Suele ocurrir que mucho de lo que se encuentra en la red respecto a algunos temas es de gran controversia; sin embargo, no tenemos la menor duda de que sabrás aplicar criterio y buen juicio en tus hallazgos de navegación.

Versa el dicho: “Una imagen dice más que mil palabras”, por ello te sugerimos consultar imágenes o videos para ampliar tus conocimientos del Bloque y/o poner en práctica lo aprendido. Busca en Internet los siguientes conceptos clave:

- a. Funciones
- b. Relaciones de una función
- c. Dominio de una función
- d. Contradominio de una función
- e. Imagen de una función
- f. Regla de correspondencia de una función

¿Qué voy a aprender?



BLOQUE II

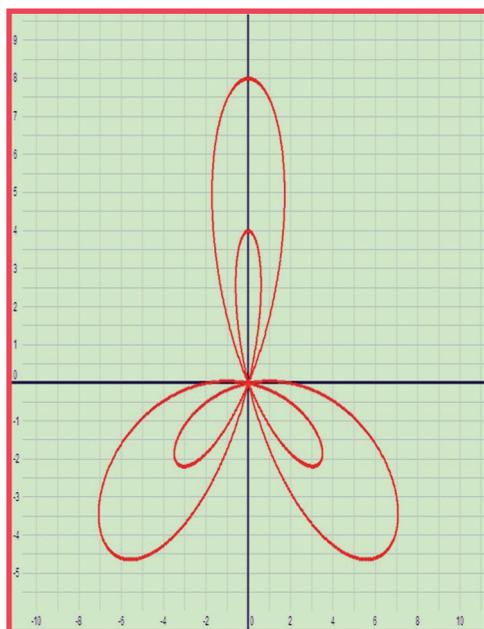
Aplica funciones especiales y transformaciones de gráficas

UNIDAD DE COMPETENCIA

Construye e interpreta modelos algebraicos y gráficos, aplicando propiedades de funciones inversas, constantes, idénticas, valor absoluto y escalonadas, para representar situaciones y resolver problemas, teóricos o prácticos, de su vida cotidiana y escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad.

Contrasta los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos funcionales, en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen. Utiliza transformaciones de gráficas para la visualización de las representaciones algebraicas y geométricas de las funciones.

En este bloque II continuarás con el estudio de las funciones, obtendrás la relación inversa de una función y determinarás si ésta es también una función. Utilizarás las funciones valor absoluto, idéntica, constante y escalonada, para describir relaciones entre algunas variables. Y construirás gráficas y ecuaciones de funciones, aplicando traslaciones y reflexiones a las gráficas de otras funciones.



BLOQUE DOS



Desarrollando competencias

Funciones inversas

En el bloque I aprendiste las funciones *inyectivas* (uno-uno), las cuales son aquellas que poseen también *inversa*.



Formen parejas e investiguen en la bibliografía que tengan a su alcance o en Internet los siguientes conceptos.

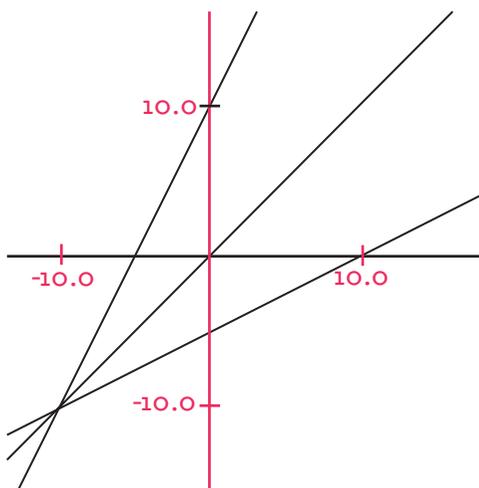
- Función Inversa
- Transformación de una función a su inversa
- Representación algebraica de una función inversa
- Representación gráfica de una función inversa



Al finalizar, en plenaria, compartan la información elaborada en la actividad anterior, y a través de una lluvia de ideas, elaboren una definición grupal, de cada uno de los conceptos.

Realicen la siguiente actividad en equipos y contesten lo que se pide.

1. Dada la función $f(x) = \frac{x}{2} - 5$.



¿Cuál es la expresión algebraica que representa su inversa?

¿La gráfica de la izquierda corresponde a las gráficas de la función original y su inversa? _____

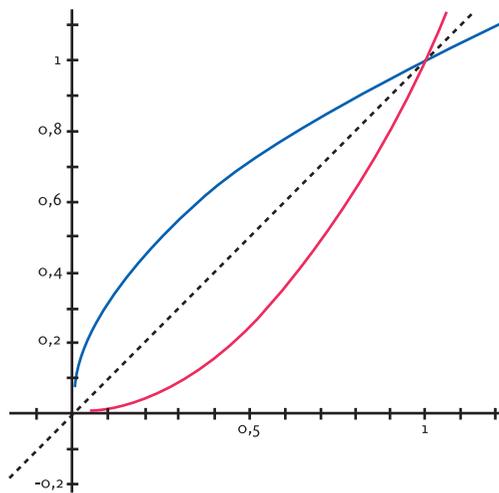
¿Por qué? _____

¿En qué punto se cortan la función original y su inversa? _____

2. Dada la siguiente función $f(x) = x^2$.

¿Cuál es la expresión algebraica que representa su inversa?

Observen las gráficas de la función y su inversa juntas.



¿Cuál corresponde a la función original y cuál a su inversa?

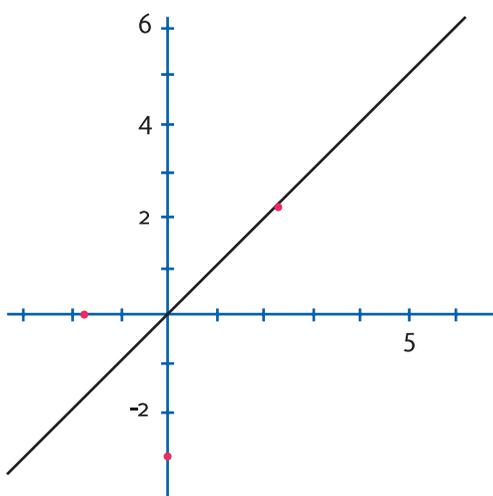
¿En qué punto o puntos se intersecan las funciones?

BLOQUE DOS

3. Dada la función $f(x) = x^2 - 3$.

¿Cuál es la expresión algebraica que representa su inversa?

Grafiquen la función original y su inversa. Determinen en qué puntos se cortan las funciones.



Intercambien sus respuestas con sus compañeros de clase, de tal manera que cada equipo revise un ejercicio distinto al que elaboró.

Una vez que terminen de revisarlo, en plenaria comenten sus opiniones acerca del trabajo que realizaron sus compañeros; recuerden que es un ejercicio de retroalimentación para mejorar el desempeño académico de cada uno.

Funciones especiales

Recuerda que en el bloque I aprendiste lo que eran las funciones algebraicas, dentro de las cuales existen algunas con características especiales y que son también de las más usadas.

Formen equipos de trabajo e investiguen cada una de las siguientes funciones.

- Valor absoluto
- Constante
- Identidad
- Escalonadas

Entreguen la información recabada en un informe y también en forma de exposición, para presentarla ante el resto del grupo. Utilicen material de apoyo como cartulinas, papel bond, rotafolios, marcadores, entre otros.

Al finalizar sus exposiciones deberán llevar a cabo un ejercicio de retroalimentación; elaboren una rúbrica que les permita evaluar y señalar las áreas de mejora de cada uno de los equipos, para que puedan trabajar sobre ellas. Completen el siguiente cuadro con lo expuesto por tus compañeros(as).



Función	Definición	Ejemplo	Gráfica
Valor absoluto			
Constante			
Identidad			
Escalonada			

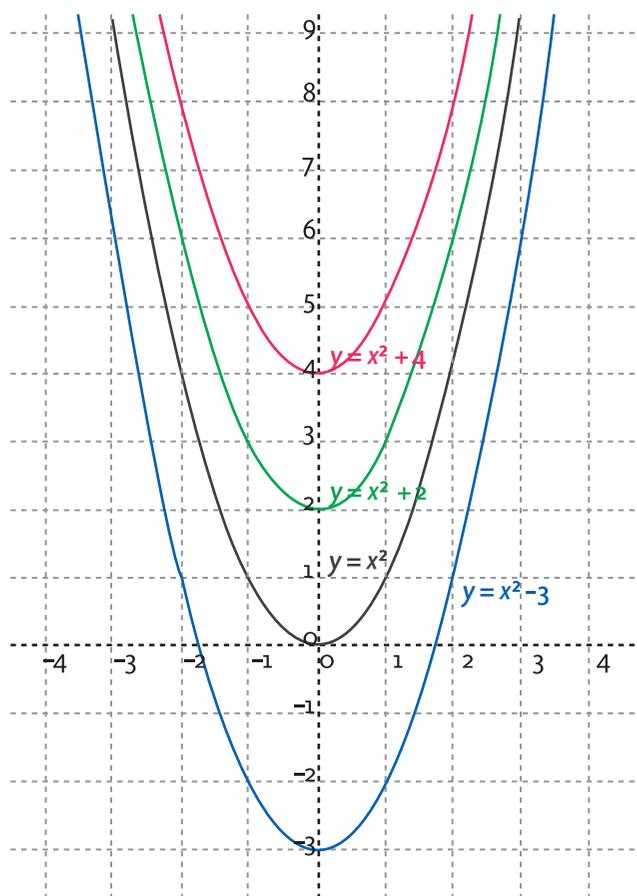
BLOQUE DOS

Transformaciones gráficas de las funciones

Al aplicar ciertas transformaciones a una gráfica de una función dada, podemos obtener las gráficas de ciertas funciones relacionadas y, de este modo, reducir el trabajo al trazar esas gráficas.

En primer lugar, consideraremos las traslaciones que provocan desplazamientos horizontales y verticales.

Toma en cuenta las siguientes funciones y su representación gráfica. Analízalas y contesta las preguntas.



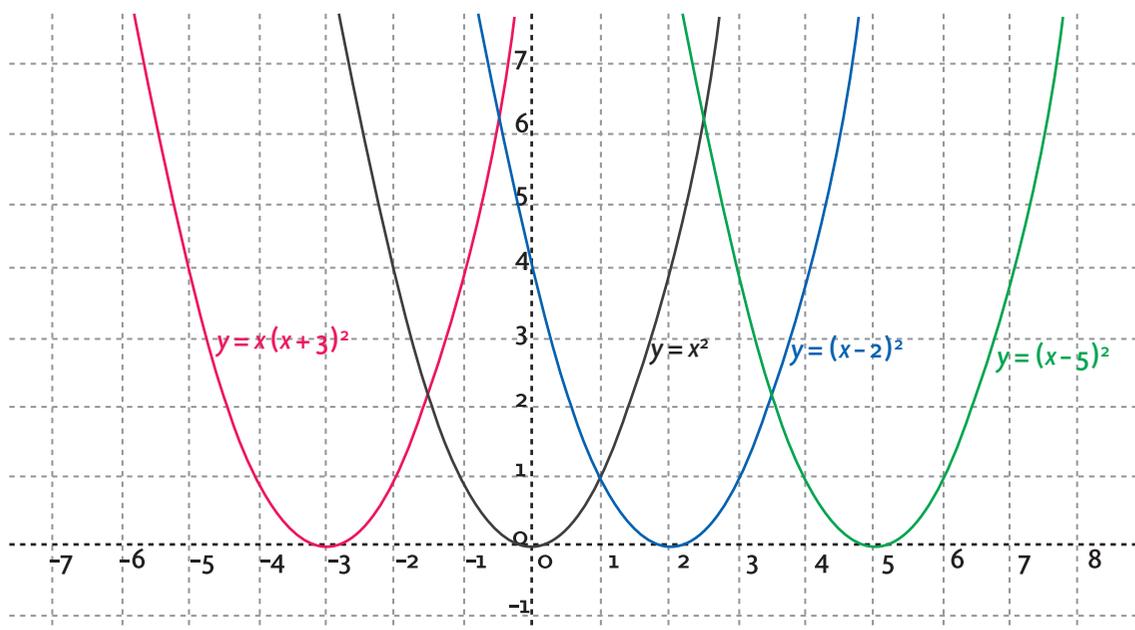
¿Cuál es la parte que tienen en común? _____

¿En qué difieren cada una de las funciones? _____

¿Cómo afectan las diferencias a su gráfica? _____

¿Cómo afecta el signo en la gráfica? _____

Ahora analiza las siguientes funciones que provocan desplazamientos horizontales.



¿Cuál es la parte que tienen en común? _____

¿En qué difieren cada una de las funciones? _____

¿Cómo afectan las diferencias a su gráfica? _____

¿Cómo afecta el signo en la gráfica? _____

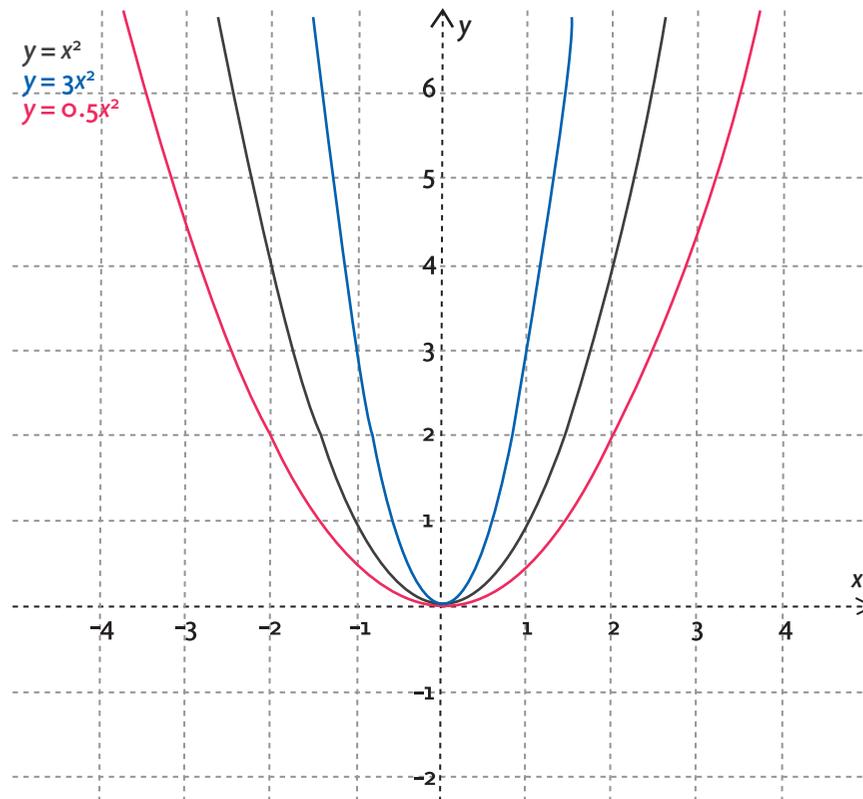
¿Cuándo una función se desplaza verticalmente y cuándo horizontalmente? _____

¿De qué dependen los desplazamientos? _____

BLOQUE DOS

Consideremos ahora las transformaciones de **Alargamiento** y **Reflexión**.

Considera las siguientes funciones y sus gráficas:



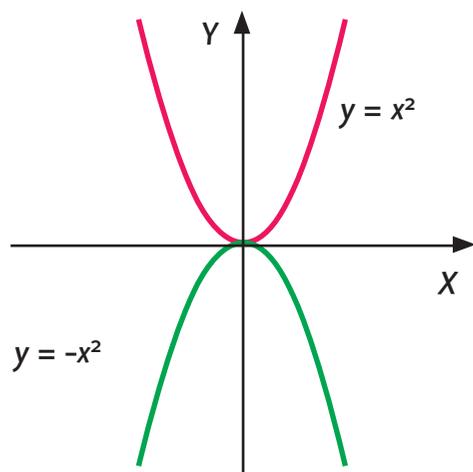
¿Qué tienen en común? _____

¿En qué difieren cada una de las funciones? _____

¿Cómo afectan las diferencias a su gráfica? _____

¿Cómo afecta el coeficiente en la gráfica? _____

Analiza la siguiente gráfica que presenta una reflexión.



¿Cuál es el eje donde se produce la reflexión? _____

¿Por qué se produjo la reflexión? _____

Como te habrás dado cuenta, todas las funciones usadas tenían en común la función $y = x^2$. De esta forma, conociendo el comportamiento de una función básica, puedes encontrar la gráfica de otras funciones si consideras los coeficientes y signos que la afectan.



Fuentes de información

BÁSICA

- Barnett, R. (2000). *Precálculo: funciones y gráficas* (4a. ed.). México: McGraw Hill Interamericana.
- Larson, R. (1996). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.
- Leithold, L. (2000). *Matemáticas previas al cálculo* (3a. ed.). México: Oup-Harla.
- Ortiz, F. (2005). *Matemáticas IV. Bachillerato general*. México: Publicaciones Cultural.
- Ruiz J. (2005). *Precálculo: funciones y aplicaciones. Matemáticas IV*. México: Publicaciones Cultural.
- Stewart, J. (2000). *Precálculo*. México: International Thomson Editores.
- Sullivan, M. (1997). *Precálculo*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

ELECTRÓNICA

- Matebrunca DOCUMENTO EN PDF EN EL CUAL SE EXPLICA LA FUNCIÓN INVERSA <http://www.matebrunca.com/Contenidos/Matematica/Funciones/funcioninversa.pdf>
[Consulta: 11/12/2014]
- Mathbas. Disponible en <http://mathbas.com/funciones.html#23>
[Consulta: 11/12/2014]

BLOQUE DOS



¿Qué he aprendido?

A continuación presentamos una serie de ejercicios para que los resuelvas de manera individual.

De acuerdo con las siguientes funciones, determina los siguientes puntos.

- Encuentra su inversa.
- Grafica la función original y su inversa juntas.
- Identifica cuál es la función básica que da origen a las demás.
- Determina en cada función si sufrió traslación, alargamiento o reflexión con respecto a la función origen.

$$y = 2x + 5 \quad y = 3x - 3 \quad y = \frac{x}{2} + 1 \quad y = -x + 4$$

Al terminar intercambia tus resultados con algún compañero y asigna un punto por cada respuesta correcta.

Si obtuviste de 13 a 16 puntos: ¡Excelente! Has aprendido el concepto de función inversa, su representación gráfica y el manejo correcto de los elementos para hacer transformaciones de funciones.

Si obtuviste de 9 a 13 puntos: ¡Bien! Tienes la idea principal del concepto de función inversa, continua estudiando el tópico para que alcances un aprendizaje mayor.

Si obtuviste 8 o menos puntos: ¡A mejorar! Retoma de nueva cuenta el tópico y recuerda que de los errores se aprende.



Quiero aprender más

Funciones compuestas

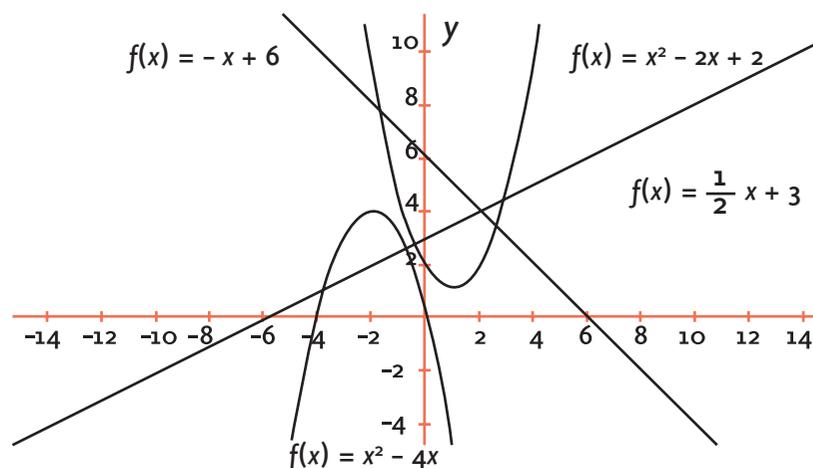
En ocasiones es necesario que, en un mismo plano cartesiano, grafiquemos varias funciones; por ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

$$f(x) = -x + 6$$

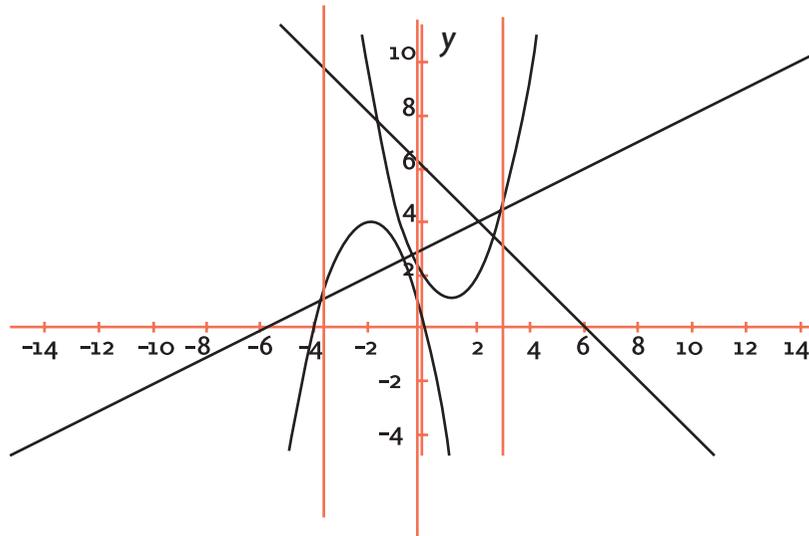
$$f(x) = x^2 - 4x$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$



Cada una por sí misma es una función; pero agrupadas, es decir, considerándolas todas a la vez, no lo son, pues para cada valor de la variable, corresponden 4 valores diferentes.

Por ejemplo a $x = -2$, corresponde $y = 2, y = 4, y = 8$ y $y = 10$. Sin embargo, a partir de ellas podemos construir lo que se llama una función compuesta formada por varias expresiones algebraicas. Para esto, es necesario dividir el eje x en intervalos consecutivos; por ejemplo:



Los intervalos que muestra la ilustración quedaron definidos por $(-\infty, -4)$, $(-4, -1)$, $(-1, 3)$ y $(3, \infty)$. Observa que los números $-4, -1$ y 3 no se están considerando en ningún intervalo y ello es necesario, por eso, definiremos los intervalos como: $(-\infty, -4]$, $(-4, -1)$, $[-1, 3]$ y $(3, \infty)$.

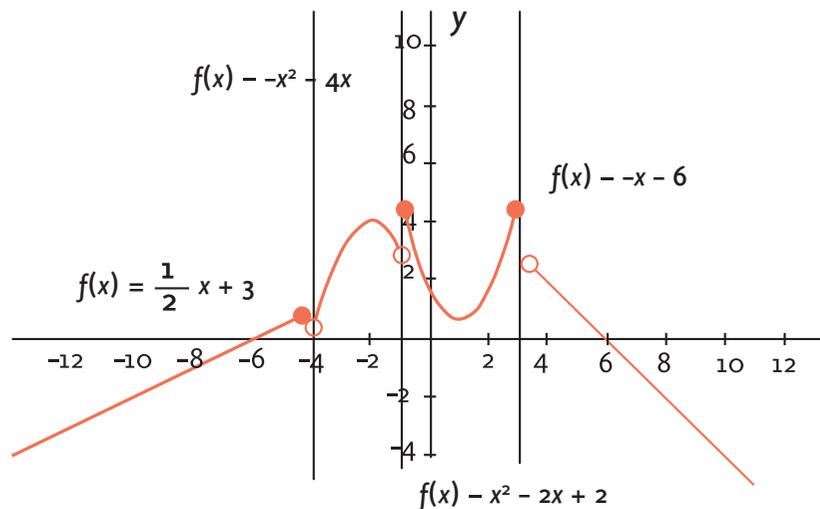
En cada uno haremos válida sólo una función, por ejemplo:

En $(-\infty, -4]$ hacemos válida $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

En $(-4, -1)$ hacemos válida $f(x) = x^2 - 2x + 2$

En $[-1, 3]$ hacemos válida $f(x) = -x^2 - 4x$

En $(3, \infty)$ hacemos válida $f(x) = -x + 6$

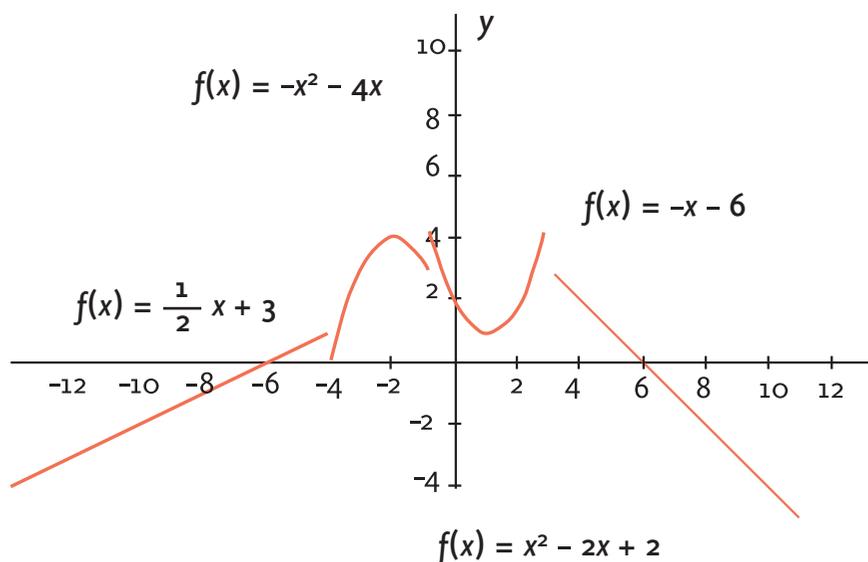


BLOQUE DOS

En cada intervalo “borramos” las gráficas no válidas y dejamos sólo el trazo de una; esto garantiza que a cada valor de x , sólo corresponderá uno de y .

Es importante analizar qué pasa con los límites de los intervalos, es decir, con $x = -4$, $x = -1$ y $x = 3$. Podemos observar que en $x = -4$ es válida la función y para evaluar sustituimos $f(-4) = \frac{1}{2}(-4) + 3 = 1$ y el punto queda definido como $(-4, 1)$.

Sabemos que a cada valor de la variable debe corresponderle sólo uno de la función; en $(-4, 0)$, representamos un espacio vacío con un hueco como se muestra en la ilustración de abajo:



La expresión algebraica de esta función se representa por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3, & \text{si } x \leq -4 \\ -x^2 - 4x, & \text{si } -4 < x < -1 \\ x^2 - 2x + 2, & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ -x + 6, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Las funciones compuestas son muy usadas en cursos posteriores de Matemáticas. Completar la idea con lo siguiente: Te sugerimos que busques en Internet los siguientes conceptos clave:

- Función inversa
- Función escalonada
- Función valor absoluto
- Función identidad
- Función constante
- Propiedades y características de las transformaciones gráficas

¿Qué voy a aprender?



BLOQUE III

Emplea funciones polinomiales de grados cero, uno y dos

UNIDAD DE COMPETENCIA

Construye e interpreta modelos polinomiales aplicando las propiedades de las funciones polinomiales de grados cero, uno y dos, para representar situaciones que involucran tasas nulas razones de cambio promedio o constante, y la obtención de valores óptimos, para resolver problemas teóricos o prácticos de su vida cotidiana y escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad.

Contrasta los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos polinomiales, en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen.

Interpreta tablas, gráficas, diagramas y textos con información relativa a funciones polinomiales.

A lo largo de tu vida estudiantil has trabajado con números, los cuales has podido sumar, restar, multiplicar, dividir, e incluso, sacar radicales y potencias; pero al cursar secundaria y ahora que cursas educación media superior, te diste cuenta de que podías realizar operaciones con letras y números a la vez, a lo cual le llamamos *Álgebra*. Específicamente en Matemáticas I estudiaste los polinomios en una sola variable, aprendiste a realizar operaciones con ellos e incluso los usaste para resolver algunos problemas prácticos. Posteriormente, en Matemáticas III estudiaste algunos tópicos de Geometría Analítica, la cual se basa en un sistema de ejes coordenados.

Mencionamos lo anterior, ya que en este bloque estudiaremos las funciones polinomiales, que se basan en polinomios y que analizaremos desde la perspectiva de la geometría analítica, haciendo uso del concepto de función que ya trabajaste en la unidad anterior.

En este bloque III reconocerás las funciones polinomiales en su forma general y en sus expresiones particulares. Distinguirás el grado, el coeficiente principal y el término constante de una función polinomial.

Representarás las gráficas de funciones polinomiales de grados cero, uno y dos. Explicarás por qué las funciones constante, lineal y cuadrática constituyen casos particulares de las funciones polinomiales de grados cero, uno y dos, respectivamente.

Finalmente aplicarás modelos lineales y cuadráticos para la resolución de problemas.



Desarrollando competencias

Funciones polinomiales

Si una función f está definida por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ donde a_0, a_1, \dots, a_n son números reales ($a_n \neq 0$) y n es un entero no negativo, entonces, f se llama una función polinomial de grado n .



En parejas investiguen, en las fuentes de información a su alcance o en Internet, los siguientes conceptos y escríbelos en tu cuaderno.

- Grado de un polinomio
- Función constante
- Función lineal
- Función cuadrática
- Funciones crecientes
- Funciones decrecientes
- Ecuación de la recta
- Parábola
- Completar trinomio cuadrado perfecto



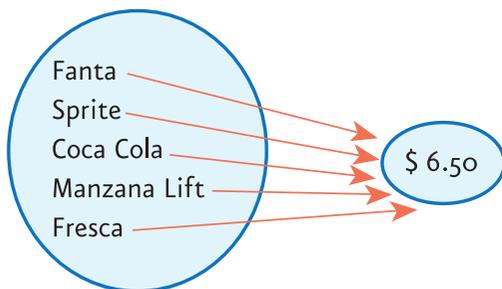
Como podrás observar, varios de los conceptos ya los has aprendido en este mismo cuaderno o en cursos anteriores, específicamente en Matemáticas III.

La función constante

De manera aleatoria, seleccionen a alguna de las parejas para que vayan anotando en el pizarrón las respuestas que resuelven el siguiente cuestionario. Recuerda que puedes participar activamente complementando, en caso de ser necesario, las respuestas.

La función constante es una función polinomial de grado _____, es decir, es de la forma $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, donde a es una _____.

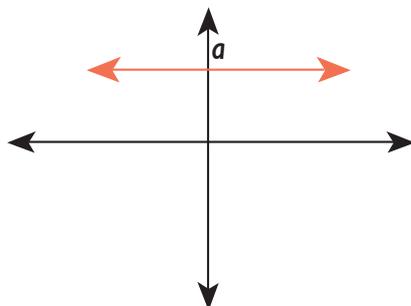
De acuerdo con la siguiente gráfica sagital,



Su dominio está representado por:

Su rango está representado por:

La función constante $f(x) = a$ tiene como dominio _____
 y como rango _____



La gráfica de una función constante está representada por una línea , _____
 que corta al eje Y en . _____

La función constante es una de las funciones más sencillas que existen y la representación de las funciones polinomiales más básica.

Función lineal

Continuando con las funciones polinomiales, la siguiente en cuanto a grado que debes estudiar y aprender sus características, es la *función lineal*. En Matemáticas III estudiaste la ecuación de la recta, que está ligada a la función lineal.

Es una función polinomial de grado uno y tiene la forma $f(x) = a^1x + a^0$, donde $a^1 \neq 0$; la principal característica es que su gráfica es una recta y, además, cuando se presenta una tabla de una función lineal, ésta posee la característica de que cuando la variable va creciendo de uno en uno, la función aumenta o disminuye de manera constante. Dicho en otras palabras, su razón de cambio es constante.

Esta razón de cambio es a lo que le llamamos **pendiente**. De forma general, la expresión analítica de la función lineal será $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente o la constante de crecimiento o decrecimiento, y b es la ordenada al origen o valor de la función cuando la variable vale cero.

En equipos investiguen las características de la función lineal como su intersección con los ejes, la interpretación de su pendiente, su representación gráfica y sus aplicaciones en situaciones reales. Al finalizar, en plenaria compartan la información recabada en la actividad anterior y, a través de una lluvia de ideas, elaboren una definición grupal, de cada uno de los conceptos.



Formen equipos de trabajo y resuelvan los siguientes problemas donde se aplica la función lineal.

1. Mi tía Anita, que vive en Durango, tiene una cocina económica y quiere saber el costo total por la producción de cierto número de tamales; sabiendo que el costo fijo por la producción diaria es de \$220, a lo cual debe agregar \$2.00 por cada tamal adicional, respondan lo siguiente:
 - a) ¿Cuál sería la expresión analítica que representará esta situación?
 - b) ¿Cuántos tamales tendrá que elaborar para que el costo neto de cada tamal sea de \$3.00?

BLOQUE TRES

2. En una fábrica de dulces de leche, un cierto tipo de dulce tiene como funciones de costo y venta: $C(x) = 4x + 360$ y $V(x) = 10x$, respectivamente. Justifica las respuestas:

- En un mismo plano cartesiano, tracen las dos graficas.
- ¿Cuál es el costo inicial de producción?
- ¿Cuántos artículos se deben producir como mínimo para que no haya perdidas (ganancia = venta - costo)?
- ¿Cuál es el costo por producir 120 elementos?
- ¿Cuánto se obtiene por vender 120 elementos?
- Para obtener una ganancia de 60,000 unidades de dinero, ¿cuántos elementos se deben vender?

3. Una función lineal está expresada mediante la tabla incompleta:

-2	-1	0					5
			0	-4			-16

- Completen la tabla.
- ¿La función es creciente o decreciente?
- ¿Cuál es el valor de la pendiente o constante de crecimiento o decrecimiento?
- ¿Cuál es el valor de la intersección con el eje de las ordenadas?
- Determinen la expresión analítica de dicha situación.
- Tracen la gráfica.

Función cuadrática

La función cuadrática es una función polinomial de grado dos y tiene la forma $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde $a_2 \neq 0$. La principal característica es que su grafica es una parábola vertical; donde el dominio y el rango son los reales; la ecuación de una función cuadrática se acostumbra expresar como:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Para graficar una función cuadrática basta con tabular la función, dándole valores arbitrarios a x y así obtener los de $f(x)$. Todas las parábolas son simétricas con respecto a una línea recta llamada **eje de simetría o eje focal**; el punto donde se cruza el eje focal y la curva (parábola) se denomina foco, como ya se había visto en Matemáticas III. (Recordemos que los elementos que definen por completo una parábola son seis: vértice, foco, eje focal, directriz, lado recto y parámetro).

La función cuadrática tiene una forma estándar, y ésta nos sirve para identificar claramente el vértice de la parábola y algunos otros elementos; con ello se nos facilita la graficación de la misma. Esta forma se obtiene a partir de $f(x) = ax^2 + bx + c$ mediante el procedimiento de completar cuadrados perfectos (el cual aprendiste en Matemáticas III) quedando:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Donde (h, k) es el vértice de la parábola y el eje de simetría es $x = h$. Además si a es positivo, entonces, se trata de una parábola que abre hacia arriba y si a es negativo se trata de una parábola que abre hacia abajo.

También podemos obtener los puntos que cortan al eje X si tomamos la función cuadrática como una ecuación cuadrática que aprendiste en Matemáticas I.

Como te habrás dado cuenta, la función cuadrática se relaciona de muchas formas con conceptos aprendidos anteriormente.

Formen equipos de trabajo y llenen el cuadro según se pide, de acuerdo con los datos que les proporciona la forma estándar de la función cuadrática. Al terminar presenten sus resultados y su gráfica, a manera de exposición, ante el resto del grupo.



$f(x) = a(x - h)^2 + k$	Vértice $V(h, k)$	Coefficiente principal (a)	Concavidad	Valor del máximo o mínimo (k)
$f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$				
$f(x) = (x + 5)^2 - 3$				
$f(x) = x^2 - 8$				
$f(x) = 5(x + 4)^2$				
$f(x) = x^2$				
$f(x) = -(x + 3)^2 - 5$				
$f(x) = -x^2$				

No olviden que al finalizar las exposiciones pueden llevar a cabo un ejercicio de retroalimentación. Elaboren una lista de cotejo para evaluar las exposiciones.



Al igual que la función lineal, la función cuadrática también tiene innumerables aplicaciones, ya que ésta puede ser el resultado de modelar cierta situación, en el Bloque I ya viste cómo modelar funciones para resolver problemas.

BLOQUE TRES



En parejas resuelvan los siguientes problemas, donde deberán modelar una función cuadrática para posteriormente encontrar el resultado pedido.

1. Un jugador golpea una pelota de beisbol a una altura de 6 ft sobre el nivel del suelo, a una velocidad de 100 ft/s. La trayectoria de la pelota está definida por la función cuadrática: $f(x) = -0.0064x^2 + 2x + 6$ donde $f(x)$ es la altura que alcanza la pelota y X la distancia desde home. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?
2. Un fabricante de accesorios para bicicletas tiene costos diarios de producción por: $C(x) = 700 - 4x + 0.5x^2$ donde $C(x)$ es el costo total en pesos y X el número de unidades producidas. ¿Cuántas unidades debe producir diariamente para obtener un costo mínimo?



Al terminar intercambien sus respuestas con sus compañeros de clase, de tal manera que cada pareja revise un resultado distinto al que elaboró.

Fuentes de información



BÁSICA

García, L. (2005). *Matemáticas 4 Bachillerato*. México: ST Editorial.

Hostetler, R. (2003). *Álgebra*. México: McGraw-Hill.

Ruiz J. (2005). *Precálculo: funciones y aplicaciones. Matemáticas IV*. México: Publicaciones Cultural.

ELECTRÓNICA

- *Matebrunca DOCUMENTO EN PDF SOBRE EL TÓPICO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA* <http://www.matebrunca.com/Contenidos/Matematica/Funciones/funcion-cuadrat-teoria.pdf>
[Consulta: 11/12/2014]
- *Mathbas*. Disponible en <http://mathbas.com/funciones.html#23>
[Consulta: 11/12/2014]

¿Qué he aprendido?



Ahora estás listo para aplicar lo que aprendiste a lo largo de este bloque y reafirmar el aprendizaje adquirido; para ello desarrolla los siguientes ejercicios en equipos de trabajo. Al terminar lleven a cabo la autoevaluación que se solicita.



1. Compré una bicicleta en \$2,600. Si su valor se deprecia linealmente cada año un 15%, ¿cuál será el valor de la bicicleta después de 5 años?
2. La compañía Nazareno-Sebastián y Asociados se dedica a la fabricación de radios. Según los datos del departamento de producción el costo fijo es de \$10,600, y por cada radioreceptor que produzcan el costo es de \$95. ¿Cuál es el costo de producir 500 radiorreceptores?
3. Don Ramón, que vive en Suchil, Durango, quiere cercar un corral rectangular de 600 metros de perímetro. ¿Qué dimensiones producirán un máximo de superficie encerrada?
4. La trayectoria de un clavado es $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{13}{8}x + 8$ donde $f(x)$ es la altura en pies y x la distancia horizontal desde el extremo del trampolín ¿Cuál es la altura máxima del clavado?

Áreas de mejora	Bueno	Regular	Mejorable	Cómo puedo mejorar
Reconozco las características principales de una función lineal.				
Reconozco todas las características de una función cuadrática.				
Hago un uso correcto de sus elementos para resolver problemas.				
Realizo gráficas de funciones lineales y cuadráticas de manera correcta.				



Quiero aprender más

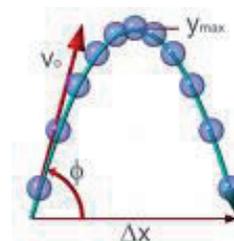
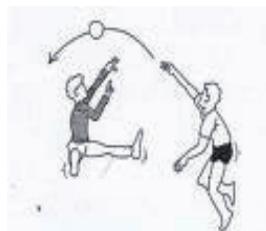
El concepto de función, tal y como hoy en día se conoce y desarrolla en los cursos básicos de matemática, surgió hasta el siglo XVIII, a diferencia del Cálculo diferencial e integral que encontró su génesis un siglo antes, lo cual difiere de la forma clásica en cómo se presenta actualmente el Cálculo, donde primero se enseñan funciones, luego límites y finalmente derivadas e integrales. Sin dejar de lado los respectivos refuerzos.

El primer matemático que intentó dar una definición formal del concepto de *función* fue el famoso y reconocido matemático e investigador en esta área, Leonhard Euler, al afirmar: “Una función de cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera por esa cantidad variable y por números o cantidades constantes, las cuales nos permiten generalizar y generalmente las representamos mediante letras o símbolos”. En la historia de las matemáticas, se le da créditos al matemático suizo Leonhard Euler por precisar el concepto de función, así como por realizar un estudio sistemático de todas las funciones elementales, incluyendo sus derivadas e integrales; sin embargo, el concepto mismo de función nació con las primeras relaciones observadas entre dos variables, hecho que surgió desde los inicios de la matemática en la humanidad, con civilizaciones como la griega, la babilónica, la egipcia y la china.

Como aprendiste en este bloque, una de las funciones más importantes es la función cuadrática.

Una función cuadrática es una expresión asociada a movimientos de partículas, en cuya trayectoria describen una parábola o eventos de la vida real en cualquier ámbito que tienen comportamiento similar.

Aquí se muestran algunos ejemplos gráficos de movimientos parabólicos y que se pueden representar matemáticamente mediante una función cuadrática.



Versa el dicho: “Una imagen dice más que mil palabras”, por ello te sugerimos consultar imágenes o videos para ampliar tus conocimientos del Bloque y/o poner en práctica lo aprendido. Busca en Internet los siguientes conceptos clave:

- a. Modelo general de las funciones polinomiales
- b. Forma polinomial de funciones de grados: cero, uno y dos
- c. Representación gráfica de funciones de grados: cero, uno y dos
- d. Características de las funciones de grados: cero, uno y dos
- e. Parámetros de las funciones de grados: cero, uno y dos
- f. Problemas que implican una función lineal
- g. Problemas que implican una función cuadrática

¿Qué voy a aprender?



BLOQUE IV

Emplea funciones polinomiales de grados tres y cuatro

UNIDAD DE COMPETENCIA

Construye e interpreta modelos polinomiales aplicando las propiedades de las funciones polinomiales de grados tres y cuatro, para representar situaciones y resolver problemas teóricos o prácticos de su vida cotidiana y escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad.

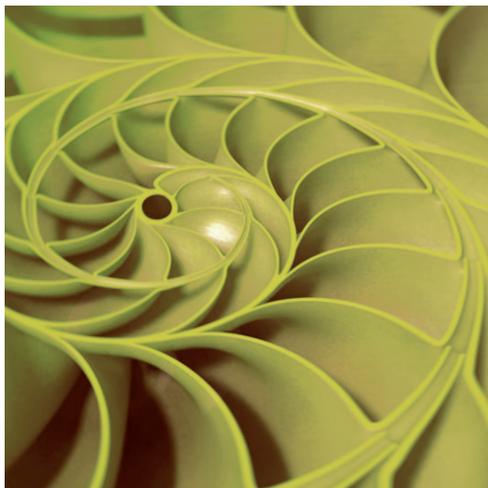
Contrasta los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos polinomiales, en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen.

Interpreta tablas, gráficas, diagramas y textos con información relativa a funciones polinomiales.

En el bloque III aprendiste acerca de las funciones polinomiales, con grados cero, uno y dos. En este bloque IV continuarás con el aprendizaje de las funciones polinomiales, pero ahora de grado tres y cuatro.

Asimismo, establecerás similitudes en el comportamiento de las gráficas de las funciones polinomiales de grado impar (uno y tres) y entre las gráficas de las funciones de grado par (dos y cuatro). Realizarás bosquejos de las gráficas de funciones polinomiales de grados tres y cuatro.

También, determinarás las intersecciones con el eje X de las gráficas de ecuaciones factorizables. Aplicarás las propiedades de las funciones polinomiales de grados tres y cuatro en la resolución de problemas.



BLOQUE CUATRO



Desarrollando competencias

La función cúbica es una función polinomial de grado tres y tiene la forma $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde $a_3 \neq 0$; de manera análoga es la función de grado cuatro $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde $a_4 \neq 0$; el dominio y rango de estas funciones son los reales.



Para tratar este tópico, el grupo se dividirá en equipos de manera equitativa y elegirán uno de los dos:

- Función cubica o de grado tres
- Función de grado cuatro

Las exposiciones deberán contener los siguientes puntos:

- Definición de la función
- Forma estándar de la función
- Similitudes que guardan con las de grado uno y dos
- Intersecciones con el eje X
- Análisis de su gráfica (cuando crecen y decrecen)
- Aplicación a problemas teóricos o prácticos
- Uso de material didáctico



Después de cada exposición, el grupo asignara una calificación que va desde 6 (deficiente) hasta 10 (excelente) al equipo expositor, lo cual dependerá de varios elementos. Hay que señalar los puntos de mejora que pueden tener sus compañeros con respecto a las exposiciones y presentaciones que realicen. Recuerden que es un ejercicio de retroalimentación para mejorar el desempeño académico de cada uno.

Áreas de mejora	Calificación
Manejo de información adecuada del tópico expuesto	
Claridad en las explicaciones	
Participación de todo el equipo	
Uso de material didáctico adecuado	

Si el equipo obtuvo 40 puntos, merece el reconocimiento de todo el grupo por su gran aprovechamiento y aprendizaje.

Si el equipo obtuvo de 33 a 39 puntos, merece una felicitación por su trabajo, aunque deberá esforzarse un poco más para alcanzar su máximo aprovechamiento.

Si el equipo obtuvo 32 puntos o menos, merecen ser alentados a que estudien con más ahínco otra vez los conceptos del bloque, para que logren un aprendizaje pleno.

Fuentes de información



BÁSICA

García L. (2005). *Matemáticas 4 Bachillerato*. México: ST Editorial.

Hostetler, R. (2003). *Álgebra*. México: McGraw-Hill.

Ruiz J. (2005). *Precálculo: funciones y aplicaciones. Matemáticas IV*. México: Publicaciones Cultural.

ELECTRÓNICA

- *Matebrunca_LLEVA A UN DOCUMENTO EN PDF SOBRE DERIVACIÓN IMPLÍCITA*. Disponible en <http://www.matebrunca.com/Contenidos/Matematica/Calculo/derivacion-implicita.pdf>
[Consulta: 11/12/2014]
- *Mathbas*. Disponible en <http://mathbas.com/funciones.html#23>
[Consulta: 11/12/2014]

BLOQUE CUATRO

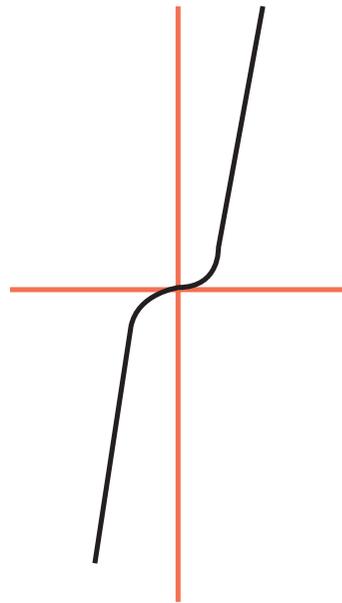


¿Qué he aprendido?



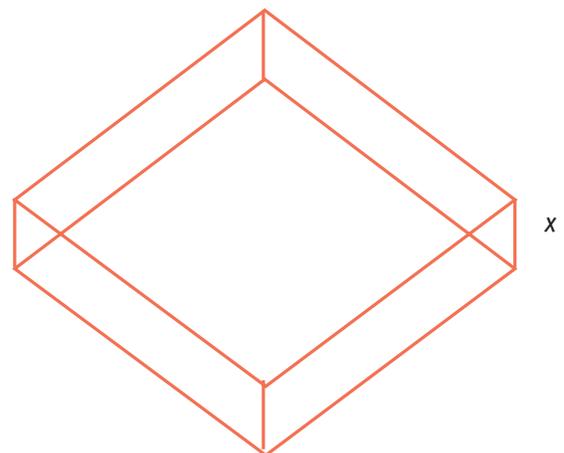
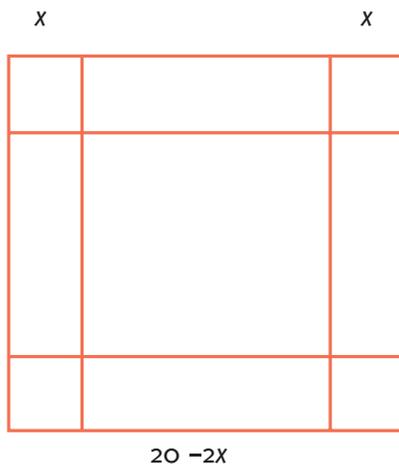
El bloque IV ha finalizado, por lo que debes conocer tu nivel de aprovechamiento acerca de las funciones de grados tres y cuatro. Resuelve los siguientes ejercicios de manera individual, y después de haber concluido la actividad intercambia tus respuestas con otro(a) compañero(a) y lleven a cabo el ejercicio de coevaluación del final.

1. A continuación se presenta la gráfica de la función cúbica $f(x) = x^3$; con base en ella, determina la gráfica de las siguientes funciones:



- a) $f(x) = x^3 + 4$
- b) $f(x) = x^3 - 4$
- c) $f(x) = (x+4)^3$
- d) $f(x) = (x-4)^3$
- e) $f(x) = (x-1)^3 + 4$

2. Se requiere construir una caja abierta de lámina cuadrada de 20 pulgadas, cortando cuadros iguales en las esquinas y doblando hacia arriba. (Toma como referencia la siguiente figura).



- a) Verifica que el volumen de dicha caja lo determina la función $V(x) = 400x - 80x^2 + 4x^3$
- b) ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?
- c) Traza la gráfica y determina el valor de la x (altura de la caja) para la cual el volumen es el máximo.

Una vez terminadas las actividades anteriores, asigna 3 puntos si consideras que fue *excelente*, 2 puntos si fue *bueno* y un punto si *necesitas mejorar*.

Áreas de Mejora	Puntos
Uso correcto de términos y conceptos	
Claridad en la resolución del ejercicio asignado	
Manejo de expresiones matemáticas	
Elaboración de gráficas de manera correcta	
Obtención de resultados correctos	

13 a 15 puntos: ¡Muy Bien! Continúa con ese aprovechamiento y aprendizaje que has obtenido hasta el momento.

10 a 12 puntos: ¡Bien! Has conseguido un nivel de aprendizaje aceptable, esfuérate un poco más y obtendrás el máximo de tu aprovechamiento.

Menos de 10 puntos: ¡Adelante! Necesitas dedicar más tiempo de estudio a los tópicos presentados en el bloque; concéntrate en los puntos básicos para que puedas desarrollar posteriormente los más complejos.

Quiero aprender más



Es importante que comprendas, en un sentido amplio, la conexión que existe entre la expresión analítica (ecuación) de una función o relación y su gráfica. Por ello, en la asignatura de Matemáticas III y en este bloque se ha trabajado en el análisis de la correspondencia que existe entre los elementos de una representación y otra.

Suele ocurrir que mucho de lo que se encuentra en la red respecto a algunos temas es de gran controversia; sin embargo, no tenemos la menor duda de que sabrás aplicar criterio y buen juicio en tus hallazgos de navegación.

Versa el dicho: “Una imagen dice más que mil palabras”, por ello te sugerimos consultar imágenes o videos para ampliar tus conocimientos del Bloque y/o poner en práctica lo aprendido. Busca en Internet los siguientes conceptos clave:

- Modelo matemático de las funciones polinomiales de grado tres y cuatro
- Propiedades geométricas de las funciones polinomiales de grados tres y cuatro
- Métodos de solución de las ecuaciones factorizables asociadas a una función polinomial de grados tres y cuatro
- Comportamiento de la gráfica de una función polinomial en función de los valores que toman sus parámetros
- Representación gráfica de funciones de grados tres y cuatro



¿Qué voy a aprender?

BLOQUE V**Emplea funciones polinomiales factorizables****UNIDAD DE COMPETENCIA**

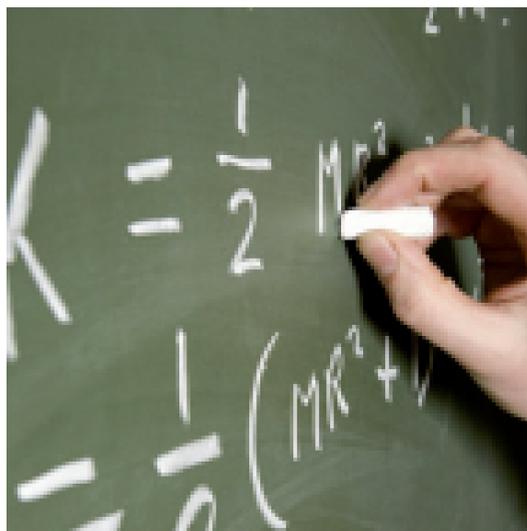
Construye e interpreta modelos polinomiales aplicando las propiedades de los ceros de las funciones, para representar situaciones y resolver problemas, teóricos o prácticos, de su vida cotidiana y escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad.

Contrasta los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos polinomiales, en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen. Interpreta tablas, gráficas, diagramas y textos con información relativa a funciones polinomiales factorizables.

¡Bienvenido(a) al bloque V! Después de haber aprendido las propiedades básicas de las funciones, ahora determinarás si un binomio de la forma $x - a$, es factor de un polinomio, sin necesidad de efectuar la división. Obtendrás en forma abreviada el cociente y el residuo de la división de un polinomio entre un binomio $x - a$.

Obtendrás los ceros y las gráficas de funciones polinomiales factorizables. Explicarás la prueba del cero racional, el teorema fundamental del álgebra y el teorema de la factorización lineal.

Finalmente, aplicarás las propiedades de las funciones polinomiales en la resolución de problemas.



Desarrollando competencias



Hasta el momento sabes obtener las raíces o soluciones de las ecuaciones lineales y cuadráticas, así como los respectivos ceros de dichas funciones. A continuación estudiaremos algunas propiedades de funciones de grado igual o mayor que 3, en relación con sus ceros o las raíces de sus ecuaciones correspondientes, con el propósito de hacer más fácil su representación gráfica.

Forma parejas e investiguen en la bibliografía que tengan a su alcance o en Internet el “teorema del factor” y “teorema del residuo” y completen el siguiente cuadro.



	Teorema del factor	Teorema del residuo
Descripción		
Ejemplo		

Al finalizar, en plenaria, compartan la información elaborada en la actividad anterior y, a través de una lluvia de ideas, elaboren una definición grupal de cada uno de los conceptos.



BLOQUE CINCO

División sintética

Para simplificar un poco el procedimiento de la división de polinomios, utilizaremos la división sintética (proceso abreviado de aquella), tópico que tal vez viste en álgebra de Matemáticas I; pero si no fue así, aquí veremos algunos ejemplos, ya que en el proceso para determinar los ceros de una función polinomial recurrimos al *teorema del residuo* y, por lo tanto, a la división de un polinomio entre un binomio de la forma $x - r$.

Para ilustrar el procedimiento de la división sintética, resolveremos un ejemplo haciendo hincapié en que esta división sólo se aplica a divisiones con polinomios de una sola variable donde el divisor es de la forma $x - r$.

Procedimiento de la división sintética (regla de Ruffini).

- El dividendo debe estar ordenado de forma decreciente.
- En el primer renglón se ponen sólo los coeficientes del dividendo, sustituyendo por cero las potencias faltantes entre un término y otro del polinomio.
- A la derecha del último elemento del dividendo se escribe el simétrico de r separado por una línea vertical.
- Se traza una línea horizontal que separa al segundo y tercer renglón.
- El primer término del dividendo se escribe como el primer término del tercer renglón.
- Después se multiplica el primer término del tercer renglón por el divisor y el producto resultante se escribe en el segundo renglón y en la columna dos.
- Se suman los términos de la segunda columna y el valor resultante se multiplica por el divisor, poniéndose dicho resultado en la tercera columna.
- Este proceso se sigue hasta sumar los elementos de la última columna del divisor.
- Los coeficientes que quedan en el tercer renglón son los coeficientes del cociente, y el último elemento del tercer renglón es el residuo.

Ejemplo:

Usando la división sintética, encuentra el cociente y el residuo de: $x^4 - 3x + 5$ entre $x + 4$

1	0	0	-3	5	-4
	-4	16	-64	268	
1	-4	16	-67	273	
x^3	x^2	x^1	x^0	residuo	

Por lo tanto, el cociente es el polinomio $x^3 - 4x^2 + 16x - 67$ y el residuo es 273.



Forma equipos de trabajo y resuelvan los siguientes ejercicios. Al terminar intercambien sus respuestas con otros equipos con el fin de comparar respuestas y conocer sus áreas de mejora en el tópic.

1. $(2x^3 - 3x^2 + 5 - 7)$ entre $(x - 2)$
- 2). $(x^5 + 1)$ entre $(x + 1)$
3. $2x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 11x + 10$ entre $x + 3$
4. $x^3 + 8$ entre $x + 2$

Ceros de funciones polinomiales

El cero en una función f es un valor x para el cual $f(x) = 0$. Por ejemplo, el cero de la función $f(x) = x - 5$ se halla en $x = 5$, porque si sustituimos este valor en la función, ésta será igual a cero; de igual manera si tenemos $f(x) = x^2 - 4x + 3$, los valores $x = 3$ y $x = 1$ son ceros en la función cuadrática anterior. En otras palabras, los ceros de una función son las raíces (los puntos por donde cruza la gráfica al eje de las x ; estos valores los puedes encontrar factorizando la función o aplicando la ecuación general para resolver ecuaciones de segundo grado).

Pero para aquellas funciones polinómicas de grado mayor que 3, es más conveniente usar la factorización o la división sintética para poder visualizar sus raíces o ceros.

Además se cuenta con diversos teoremas que te ayudan a identificar ciertas características de las raíces que posee un polinomio, como el siguiente:

Teorema fundamental del álgebra: Toda ecuación polinomial de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz, real o compleja.

Investiga los siguientes teoremas relacionados con las raíces de funciones polinomiales.

Teorema de las n raíces:

Teorema de las raíces complejas:

BLOQUE CINCO

Teorema de las raíces racionales:



En parejas contesten las preguntas concernientes al siguiente ejercicio, que tiene que ver con los teoremas que investigaste en la actividad anterior.

Encuentren las raíces racionales de la función polinomial $f(x) = 4x^3 - 16x^2 + 9x + 36$.

¿Qué teorema pueden aplicar para conocer cuáles serían las posibles raíces racionales?

Los factores del término independiente son $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36\}$ y los factores del coeficiente principal son $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

¿Cuáles y cuántas serían las probables raíces de esta función polinomial?

Realicen la división sintética con algunas de las raíces probables.

-4	-16	9	36	1.5	¿Cuál fue su residuo? _____
----	-----	---	----	-----	-----------------------------

-4					¿Es raíz de la función? _____
----	--	--	--	--	-------------------------------

-4	-16	9	36	1	¿Cuál fue su residuo? _____
----	-----	---	----	---	-----------------------------

-4					¿Es raíz de la función? _____
----	--	--	--	--	-------------------------------

-4	-16	9	36	-1.5	¿Cuál fue su residuo? _____
----	-----	---	----	------	-----------------------------

-4					¿Es raíz de la función? _____
----	--	--	--	--	-------------------------------

-4	-16	9	36	-4	¿Cuál fue su residuo? _____
----	-----	---	----	----	-----------------------------

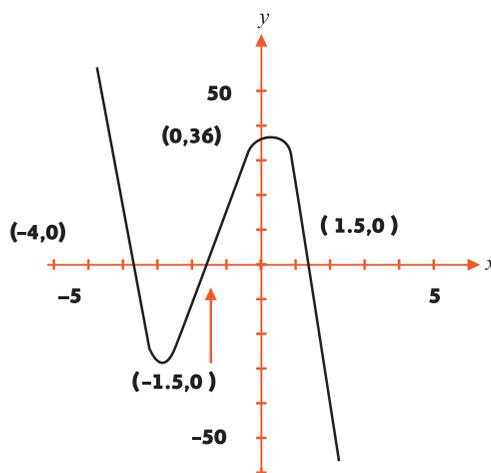
-4					¿Es raíz de la función? _____
----	--	--	--	--	-------------------------------

¿Es necesario continuar probando más posibles raíces? _____

¿Por qué? _____

¿Cuál es el teorema que aplican para poder dar respuesta a la pregunta anterior? _____

Como ya conocemos las raíces de la función, éstas nos ayudarán a construir la gráfica. Contamos con los puntos $(-4,0)$, $(-1.5, 0)$, $(1.5, 0)$. Ahora sólo hay que tabular con algunos valores intermedios entre estos puntos y, además, obtener el punto por donde cruza al eje de las ordenadas (cuando $x = 0$). Por lo tanto la gráfica que obtendremos será:



En equipos encuentren los ceros polinomiales de las siguientes funciones, determinen si son reales o complejas y elaboren su gráfica.



a) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$

b) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 28$

Una vez finalizada la actividad anterior, elaboren sus conclusiones, mismas que van a presentar al resto del grupo; comenten sus diferencias para enriquecer el tópico revisado.

Fuentes de información



BÁSICA

García L. (2005). *Matemáticas 4 Bachillerato*. México: ST Editorial.

Hostetler, R. (2003). *Álgebra*. México: McGraw-Hill.

Ruiz J. (2005). *Precálculo: funciones y aplicaciones. Matemáticas IV*. México: Publicaciones Cultural.

ELECTRÓNICA

- *Matebrunca DOCUMENTO EN PDF SOBRE OPERACIONES CON POLINOMIOS* . Disponible en <http://www.matebrunca.com/Contenidos/Matematica/algebra/algebra-opera-polinomio.pdf>
[Consulta: 11/12/2014]
- *Mathbas*. Disponible en <http://mathbas.com/funciones.html#23>
[Consulta: 11/12/2014]



¿Qué he aprendido?



Has finalizado el bloque V y retomaremos las funciones polinomiales, sus teoremas y gráficas.

Formen equipos de trabajo y, de las siguientes, funciones polinomiales determinen su gráfica, raíces y variación de la misma.

Al terminar, presenten sus resultados en forma de exposición ante el resto del grupo.

a) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 12x + 12$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$

c) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

d) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

e) $f(x) = x^4 - 17x^2 + 4$

Elijan de manera aleatoria a los equipos que expondrán sus resultados (un equipo por función) y lleven a cabo la siguiente actividad de evaluación.



ÁREAS DE MEJORA	BUENO	REGULAR	MEJORABLE	CÓMO PUEDO MEJORAR
Conocen y aplican los teoremas de los ceros polinomiales.				
Aplican el teorema del Residuo y del factor.				
Usan la división sintáctica de manera correcta.				
Realizan la gráfica de la función de manera correcta.				

Quiero aprender más



Regla de los signos de Descartes

René Descartes encontró un método para indicar el número de raíces positivas en un polinomio. Esta regla dice lo siguiente:

“El número de raíces reales positivas de un polinomio $f(x)$ es igual al número de cambios de signo de término a término de $f(x)$ ”.

Hay que recordar que los polinomios se tienen que escribir en orden decreciente conforme al grado de cada término.

Por ejemplo, el polinomio:

$f(x) = x^2 + x - 12$ Tiene un cambio de signo, del segundo al tercer término y, por lo tanto, tiene una raíz positiva.

$g(x) = +x^3 - 4x^2 + x + 6$ Tiene dos cambios de signo y dos raíces positivas.

$h(x) = +x^4 - 5x^2 + 4$ Tiene dos raíces positivas.

$i(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ No tiene cambios de signo y, por lo tanto, no tiene raíces reales positivas.

Busca en Internet los siguientes conceptos clave:

- Ceros y raíces de la función
- Teoremas del factor y del residuo
- División sintética
- Teorema fundamental del álgebra
- Teorema de factorización lineal
- Gráficas de funciones polinomiales factorizables.
- Ejercicios de aplicación práctica de cálculos de factorización



¿Qué voy a aprender?

BLOQUE VI

Emplea funciones racionales

UNIDAD DE COMPETENCIA

Construye e interpreta modelos con funciones racionales, aplicando razones entre funciones racionales para representar situaciones y resolver problemas teóricos o prácticos de su vida cotidiana y escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad.

Contrasta los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos racionales, en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen. Interpreta tablas, gráficas, diagramas y textos con información relativa a funciones racionales.

En este bloque VI expresarás una función racional mediante polinomios que carecen de factores comunes. Determinarás el dominio de definición de una función racional.

Determinarás asimismo si una función racional posee asíntotas horizontales, verticales u oblicuas y las obtendrás en caso afirmativo. Elaborarás la gráfica de una función racional auxiliándote, cuando existan, de sus asíntotas. Finalmente, aplicarás las funciones racionales en la resolución de problemas.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ \textcircled{3} & (x^3 + x^2) + (-4x - 4) \\ & x^2(x+1) - 4(x+1) \\ & (x^2 - 4)(x+1) \end{aligned}$$



En este bloque VI revisaremos las funciones racionales, es decir, aquellas formadas por el cociente de dos polinomios, su variación gráfica para valores de x lejos del origen, y valores de x muy cercanos a los puntos donde el polinomio denominador se hace cero, es decir, alrededor de los puntos donde la función racional no está definida.

Para iniciar con el aprendizaje de este bloque, investiga las definiciones y los conceptos de función racional, asíntotas horizontales y asíntotas verticales, y cómo se obtiene el dominio de definición de una función racional y su representación gráfica.

Al finalizar, en plenaria, comparte la información elaborada en la actividad anterior y, a través de una lluvia de ideas, elaboren una definición grupal, de cada uno de los conceptos.

Veamos algunos ejemplos de funciones racionales con su dominio y un bosquejo de sus gráficas.

Ejemplo 1

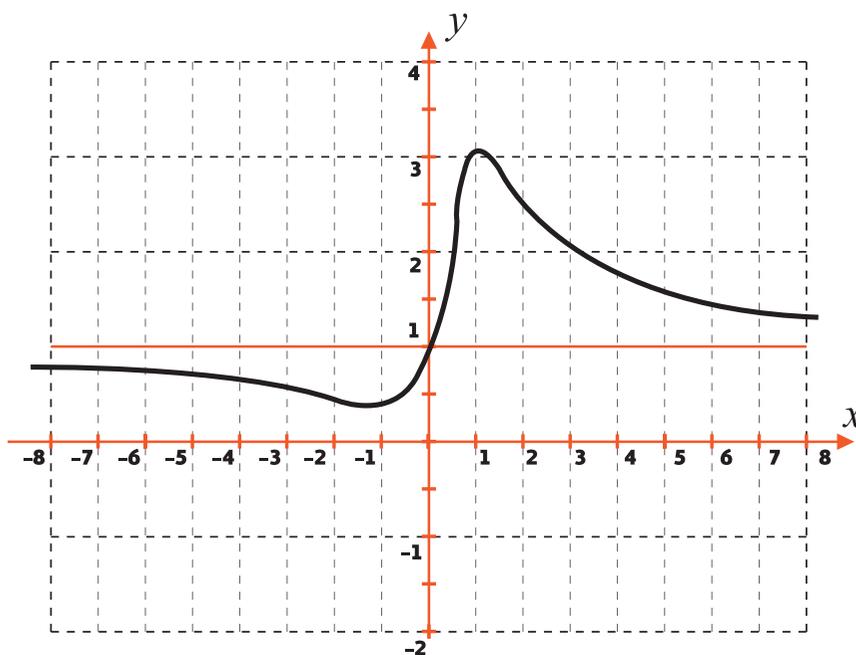
$$h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$$

En este caso, el dominio de la función h es:

$$D_h = \mathbf{R} - \{x | x^2 - x + 1 = 0\}$$

Ya que $b^2 - 4ac < 0$, se sigue que el polinomio $x^2 - x + 1$ no se anula y por lo tanto $D_h = \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$.

Y su gráfica quedaría:



BLOQUE SEIS

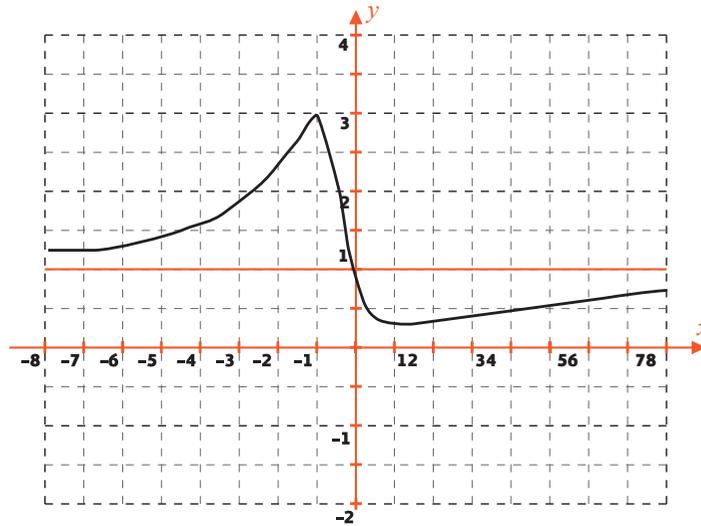
Ejemplo 2

$$h(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

En este caso, su dominio es: _____

Por lo tanto, ¿tiene asíntotas? _____

Y su gráfica es:

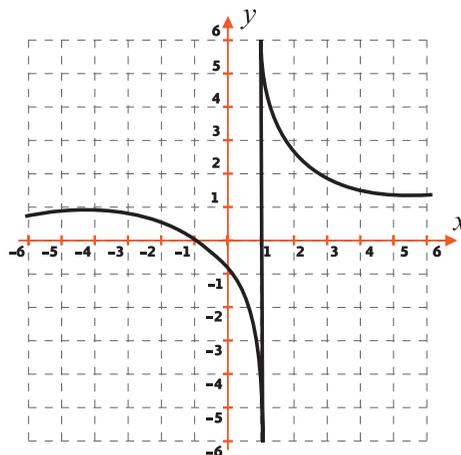


Ejemplo 3

$$h(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}$$

¿Cuál es su dominio? _____

¿De acuerdo con su dominio tiene o no asíntotas? _____

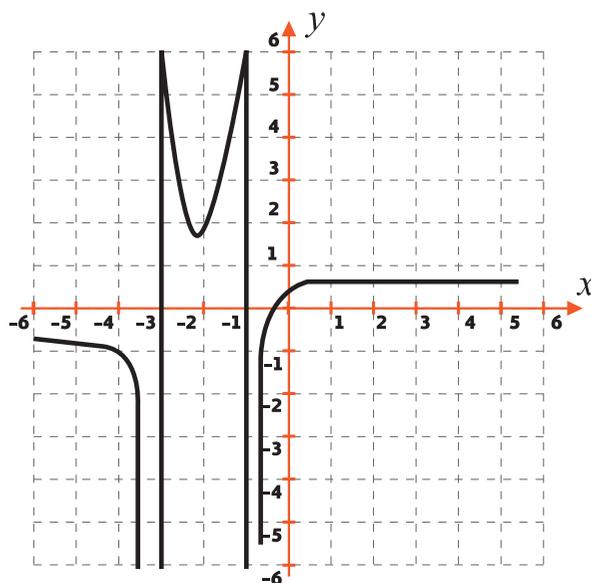


Observa su gráfica y notarás que se formaron unos huecos. ¿Qué significan? _____

¿Qué tipo de asíntota se forma? _____

¿Cómo se comporta la función antes y después de la asíntota? _____

Ejemplo 4



A la gráfica de la izquierda le corresponde la función $h(x) = \frac{6(4x+1)}{(4x+25)(2x+3)}$

¿Cuál es su dominio? _____

¿Tiene asíntotas? Y si las tiene, ¿dónde están ubicadas?

¿Qué tipo de asíntotas se observan?

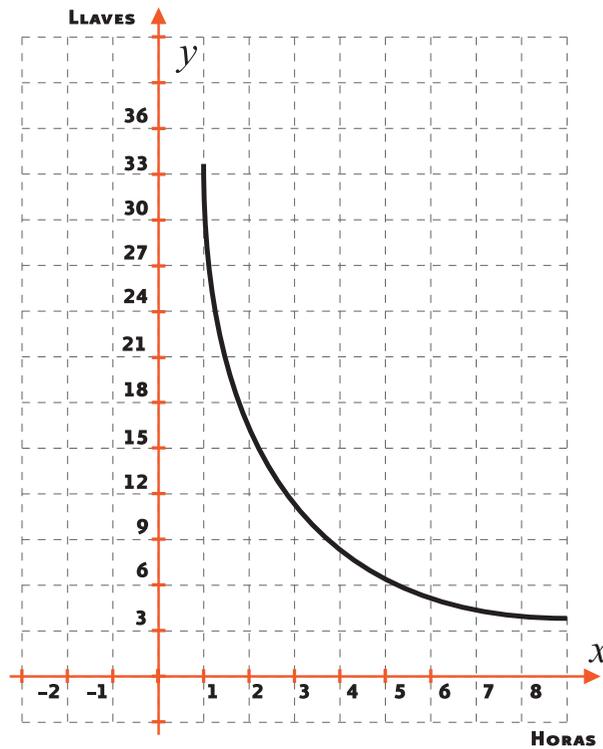
Aplicaciones de las funciones racionales

Diversos campos emplean funciones racionales para describir los procesos que se dan en la naturaleza o en la vida diaria. En distintos ámbitos se pueden encontrar variaciones de tipo inverso, como el tiempo que le lleva a un estanque llenarse considerando el número de llaves iguales que lo llenan. Por ejemplo: Una llave llena un estanque, digamos de agua, en 36 horas; dos llaves en 18 horas, 3 en 12 horas, 4 en 9 horas, 6 en 6 horas.

Una representación analítica está dada por la siguiente expresión $xy = 36$, donde y es el número de llaves y x es el tiempo en horas empleado.

BLOQUE SEIS

Observa que al aumentar el tiempo, el número de llaves disminuye y si aumenta el número de llaves el tiempo disminuye. En nuestro caso, 36 se ha mantenido constante.



Decimos entonces que las dos cantidades son inversamente proporcionales. Una gráfica muestra la forma en que varían las cantidades.

Este tipo de variación se puede ver como un caso particular de la función racional:

$$y = \frac{k}{x}$$

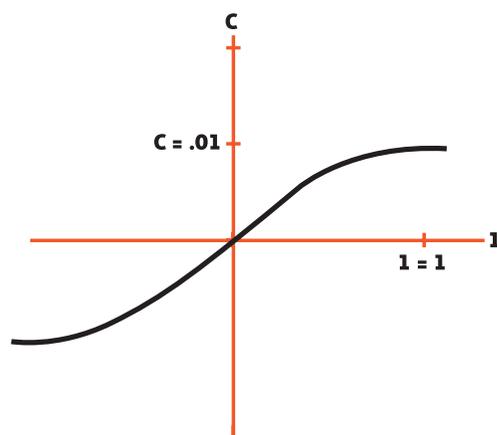
Con k la constante de variación y como asíntotas los ejes coordenados.

Veamos otro ejemplo.

A un paciente se le aplica un medicamento y su concentración en el torrente sanguíneo después de t horas está dado por:

$$C(t) = \frac{0.2t}{t^2 + 1}$$

Con C en miligramos por centímetro cúbico. Interpretamos la asíntota de la función racional dada.



De acuerdo con la función y su gráfica contesta.

¿Tiene asíntotas? _____

¿Dónde están y de qué tipo son? _____

Por el contexto del problema, ¿a qué conclusión puedes llegar? _____

Como te habrás dado cuenta, las funciones racionales también tienen aplicaciones en la vida diaria. Te invitamos a que busques más ejemplos de cómo se pueden aplicar estas funciones en tu escuela, hogar o en tu comunidad.



Fuentes de información



BÁSICA

- García L. (2005). *Matemáticas 4 Bachillerato*. México: ST Editorial.
- Hostetler, R. (2003). *Álgebra*. México: McGraw-Hill.
- Ruiz J. (2005). *Precálculo: funciones y aplicaciones. Matemáticas IV*. México: Publicaciones Cultural.

ELECTRÓNICA

- *Matebrunca*. Disponible en <http://www.matebrunca.com/Contenidos/Matematica/Funciones/funcioninversa.pdf>
[Consulta: 11/12/2014]
- *Mathbas*. Disponible en <http://mathbas.com/funciones.html#23>
[Consulta: 11/12/2014]

BLOQUE SEIS



¿Qué he aprendido?



¡Felicidades! Has terminado el bloque VI, aplica tu aprendizaje sobre funciones racionales para resolver en parejas los siguientes ejercicios.

Al terminar elijan de manera aleatoria a alguna pareja para que pase al pizarrón a exponer su procedimiento y resultado.

1. Determinar el dominio, corte con el eje X (si lo hay) y todas las asíntotas existentes en cada una de las funciones racionales:

$$1. r(x) = \frac{x^2}{(x^2 - 1)}$$

$$2. r(x) = \frac{x^2 + x}{x + 1}$$

$$3. r(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)}$$

$$4. r(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$5. r(x) = \frac{x^3 + 1}{x^4 + x^2 - 2}$$

$$6. r(x) = \frac{x + 1}{x^3 - 1}$$

$$7. r(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$$

$$8. r(x) = x - \frac{x^4 + 1}{x(x^3 - 1)}$$

2. La concentración de cierto medicamento en un paciente t horas después de la inyección está dada por:

$$C(t) = \frac{t^2}{2t^3 + 1} \text{ donde } 0 \leq t \leq 4$$

Donde C se mide en miligramos por centímetro cúbico. Determine cuándo aumenta y disminuye la concentración.

3. Durante una epidemia de influenza, la proporción de la población baja en defensas que fue infectada está dada por:

$$P(t) = \frac{t}{2+t^2}$$

¿Para cuál valor de t es p máxima?

4. El costo C en la producción de n artículos es $C(n) = 0.2n^2 + 10n + 5$. Calcular el número de artículos que deben producirse para obtener el costo promedio mínimo por unidad.

El costo promedio es dado por: $c = \frac{C}{n}$

Después de revisar sus respuestas, comenten en plenaria sus opiniones acerca del trabajo que realizaron sus compañeros, recuerden que no es una crítica, más bien es un ejercicio de retroalimentación que tiene como fin mejorar el desempeño académico de cada uno, para la evaluación del ejercicio pueden elaborar una lista de cotejo.



Asigna 3 puntos si consideras que fue excelente, 2 puntos si fue bueno y un punto si fue deficiente.

Áreas de Mejora	Puntos
Uso correcto de términos y conceptos	
Claridad en la presentación del ejercicio asignado.	
Manejo de expresiones matemáticas	
Elaboración de material didáctico	
Participación de todo el equipo	

13 a 15 puntos: ¡Muy Bien! Continúa con ese aprovechamiento y aprendizaje que has obtenido hasta el momento.

10 a 12 puntos: ¡Bien! Has conseguido un nivel de aprendizaje aceptable, esfuérate un poco más y obtendrás el máximo de tu aprovechamiento.

Menos de 10 puntos: ¡Adelante! Necesitas dedicarle más tiempo de estudio a los tópicos presentados en el bloque, concéntrate en los puntos básicos para que puedas desarrollar posteriormente los más complejos.



Quiero aprender más

Asíntotas curvilíneas

En la descomposición en fracciones de la función $\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$ obsérvese que el cociente produce como resultado una suma de funciones $(1 + x) + \frac{-x}{x^2 + 1}$, donde el primer sumando es la asíntota $1 + x$ y el segundo la fracción propia $\frac{-x}{x^2 + 1}$.

Nótese la situación al igual que presenta la función $\frac{3x^3 + 6x}{x^2 + 2}$, donde al realizar el cociente, el resultado es el término $3x$.

En ambos ejemplos el cociente es un polinomio de grado uno y la asíntota sólo se encuentra en el primero de ellos, pues en el otro la fracción propia no existe.

A estas asíntotas se les conoce como asíntotas rectilíneas, donde $r(x)$ es de la forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = (ax + b) + \frac{s(x)}{q(x)}$$

Con $\frac{s(x)}{q(x)}$ como fracción propia.

Para el caso de asíntotas curvilíneas de $r(x)$ asíntotas que no representan polinomios de primer grado, se requiere que los polinomios cumplan con la desigualdad $n - m > 1$.

Además de la existencia de la fracción propia, la existencia de la asíntota como un polinomio necesariamente de grado ≥ 2 .

Veamos algunos ejemplos de asíntotas curvilíneas donde se cumpla $n - m > 1$, es decir, $n - m \geq 1$

Ejemplo 1.

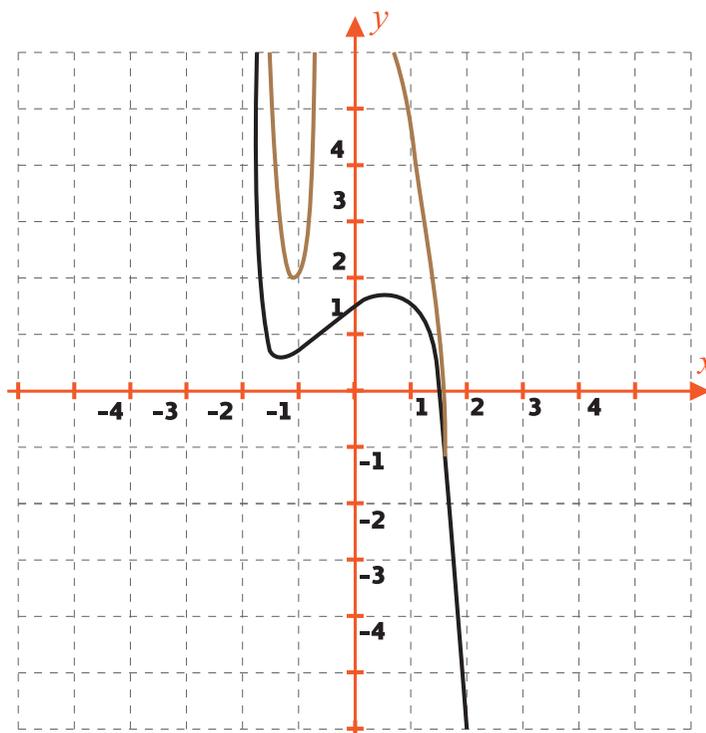
$$r(x) = (1 - x^3 + x) + \frac{1}{x^2}$$

Así se tiene que:

$$r(x) = (1 - x^3 + x) + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 5x + x^3 + 1}{x^2}$$

Asíntota curvilínea $y = 1 - x^3 + x$, $n = 5$, $m = 2$

Asíntota vertical $x = 0$



Ejemplo 2.

$$r(x) = (1 - x^3 + x) + \frac{1}{x} = \frac{x - x^4 + x^2 + 1}{x}$$

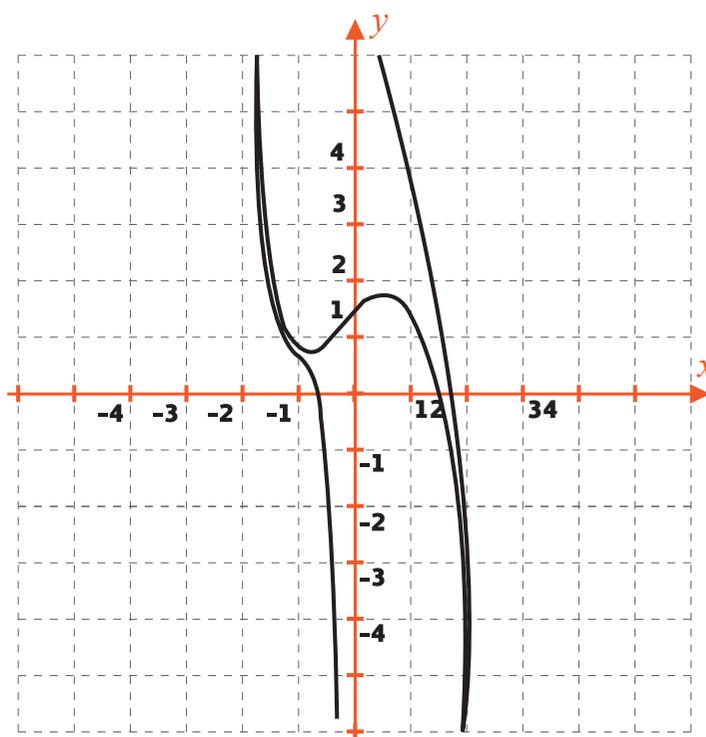
Asíntota curvilínea

$$y = -x^3 + x,$$

$n = 4$, $m = 1$

Asíntota vertical $x = 0$

Obsérvese que el polinomio y la asíntota se cortan.



Busca en Internet los siguientes conceptos clave:

- Función racional
- Dominio de definición de una función racional
- Asíntotas horizontales
- Asíntotas verticales
- Asíntotas oblicuas
- Criterios de existencias de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas
- Resolver problemas prácticos donde se apliquen cálculos de factorización



¿Qué voy a aprender?

BLOQUE VII

Aplica funciones exponenciales y logarítmicas

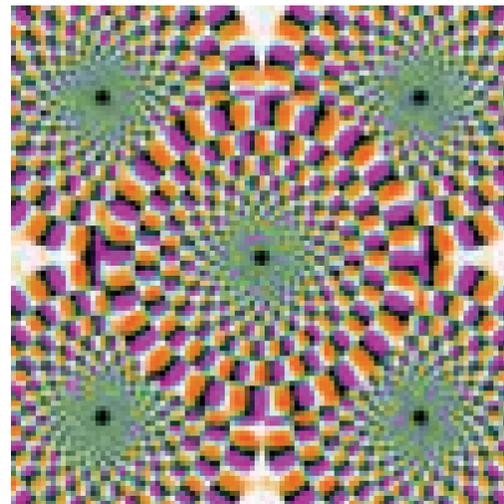
UNIDAD DE COMPETENCIA

Construye e interpreta modelos exponenciales y logarítmicos aplicando las propiedades de crecimiento y decrecimiento propias de estas funciones, para representar situaciones y resolver problemas teóricos o prácticos, de su vida cotidiana o escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad. Contrasta los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos racionales en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen. Interpreta tablas, gráficas, diagramas y textos con información relativa a funciones exponenciales y logarítmicas.

Como recordarás, en el bloque I aprendiste que había diversos tipos de funciones, entre las cuales se encontraban las funciones trascendentes, entre las cuales se encuentran las funciones exponenciales y logarítmicas que trataremos en este bloque.

Explicarás por qué una función exponencial es creciente o decreciente. Obtendrás el valor inicial y el factor de crecimiento de una función exponencial. Utilizarás la función exponencial natural para modelar situaciones que involucran al número e .

Construirás la función logarítmica como la inversa de la función exponencial. Trabajarás con logaritmos y resolverás ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Reconocerás situaciones que pueden modelarse mediante funciones exponenciales y logarítmicas y aplicar éstas para hallar su solución.



Desarrollando competencias

Las funciones exponenciales están presentes en una gran variedad de fenómenos. Las encontramos, por ejemplo, en la forma en que se reproduce la llamada marea roja, que consiste en una gran colección de billones de protozoos que se multiplican a gran velocidad, afectando a muchas especies marinas.

¿No te has enfrentado alguna vez a algún tipo de expresión matemática parecida a $2^x = 8$, donde es necesario determinar el valor de x cuando ésta es un exponente?

Por lo general, habrás resuelto ecuaciones de primero y segundo grados, pero no cuando la variable es un exponente; comúnmente te enfrentabas a despejes tales que cuando la variable está multiplicando pasa dividiendo o si está sumando pasa restando o viceversa, y hasta te han dicho que cuando existe un exponente entero pasa como la raíz. Si ahora tratas de despejar x de la expresión anterior, ¿puedes obtener con ello su valor?

Para entender cuestiones como las anteriores, es necesario que aprendas las funciones exponenciales y logarítmicas.

Reúnete en equipos de trabajo y elijan alguno de los tópicos que mencionamos a continuación, los cuales deberás investigar y presentarlos ante el resto del grupo, además de elaborar un informe por escrito para que lo incluyas en tu portafolio de evidencias.

**1. Función exponencial**

- ✓ Definición.
- ✓ Dominio y rango.
- ✓ Forma de su gráfica.
- ✓ Comportamiento de la gráfica de acuerdo con su base.
- ✓ Comportamiento de la gráfica de acuerdo con el signo de su exponente.
- ✓ Función exponencial natural.
- ✓ Relación que guarda con la función logaritmo.
- ✓ Aplicaciones en la vida cotidiana (interés compuesto, depreciación, crecimiento de poblaciones, etc.).

BLOQUE SIETE

2. Función logaritmo

- ✓ Definición.
- ✓ Dominio y rango.
- ✓ Forma de su gráfica.
- ✓ Función logaritmo natural.
- ✓ Comportamiento de la gráfica de acuerdo con su base.
- ✓ Aplicación en la vida cotidiana (interés compuesto, depreciación, crecimiento de poblaciones, etc.)

3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

- ✓ Cambio de la forma exponencial a la forma logarítmica.
- ✓ Las 4 propiedades de los logaritmos.
- ✓ Ejemplos de solución de ecuaciones exponencial y logarítmica.

Para realizar sus exposiciones, deberá participar todo el equipo; pueden utilizar el pizarrón, cartulinas, papel bond, rotafolios, plumones, marcadores, entre otros, o cualquier material que les ayude a explicar mejor el tópico.

Al terminar cada exposición, completa los siguientes cuadros con la información correspondiente.



Función exponencial	
Definición	
Dominio y rango	
Gráfica	
Características especiales	

Función logaritmo	
Definición	
Dominio y rango	
Gráfica	
Características especiales	

Ecuaciones exponenciales y logaritmos	
Propiedades de los logaritmos	
Cambio de forma logarítmica a exponencial	
Ejemplo de solución de una ecuación exponencial	
Ejemplo de solución de una ecuación logarítmica	

BLOQUE SIETE



Después de las exposiciones, lleven a cabo un ejercicio de retroalimentación, señalando los puntos de mejora para sus presentaciones. Te sugerimos que durante la exposición de tus compañeros(as) completes el siguiente cuadro.

Aspectos a evaluar	Bueno	Regular	Mejorable	Cómo puedo mejorar
Uso correcto de conceptos y términos				
Claridad de palabra al dirigirse al grupo y en la explicación.				
Uso de material didáctico				
Participación de todo el equipo				



Fuentes de información

BÁSICA

- García L., (2005), *Matemáticas 4 Bachillerato*. México: ST Editorial.
- Hostetler, R. (2003). *Álgebra*. México: McGraw-Hill.
- Ruiz J. (2005). *Precálculo: funciones y aplicaciones. Matemáticas IV*. México: Publicaciones Cultural.
- Sullivan, M. (1997). *Precálculo*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

ELECTRÓNICA

- *Matebrunca*. Disponible en <http://www.matebrunca.com/Contenidos/Matematica/Funciones/expo-log-aplicac.pdf>
[Consulta: 11/12/2014]
- *Mathbas*. Disponible en <http://mathbas.com/funciones.html#23>
[Consulta: 11/12/2014]

¿Qué he aprendido?

El bloque VII ha terminado y debes poner a prueba las competencias desarrolladas sobre funciones exponenciales y logarítmicas, sus propiedades y sus resoluciones.

De manera individual contesta lo que se pide.

I. Elige la respuesta correcta.

- ¿Cuál es la diferencia que existe entre las funciones polinomiales y las exponenciales?
 - No hay diferencias.
 - Siempre crecen las polinomiales.
 - Las exponenciales, por lo general, crecen o decrecen de modo rápido.
 - Las exponenciales son parábolas y las polinomiales son líneas rectas.
- ¿Qué ocurre al acercarse los valores de x al infinito en una función exponencial que decrece?
 - Deja de existir la función.
 - Desaparece la función.
 - La función se vuelve, también, infinita.
 - El valor de la función se aproxima a cero.
- ¿Qué ocurre al acercarse los valores de x al infinito en una función exponencial que crece?
 - Deja de existir la función.
 - Desaparece la función.
 - La función se vuelve, también, infinita.
 - El valor de la función se aproxima a cero.
- Las funciones exponenciales sólo crecen cuando su base:
 - Es cero.
 - Es mayor que la unidad.
 - Es igual a la unidad.
 - Es negativa.
- Las funciones exponenciales sólo decrecen cuando su base:
 - Adopta un valor mayor que cero y menor que la unidad.
 - Es mayor que la unidad.
 - Es igual a la unidad.
 - Es negativa.

BLOQUE SIETE

II. Analiza cada aseveración y calificala como falsa (F) o verdadera (V) según corresponda:

1. Para $x = 0$, la función toma el valor 1: $f(0) = b^0 = 1$. ()
2. Para $x = 1$, la función toma el valor a : $f(1) = b^1 = b$. ()
3. La función exponencial es positiva para cualquier valor de x : $f(x) > 0$. ()
4. Si la base de la potencia es mayor que 1, $b > 1$, la función exponencial es creciente. ()
5. Si la base de la potencia es menor que 1, $b < 1$, la función es decreciente. ()
6. Si $\log_b N = x$ equivale a decir que $N = X^b$. ()
7. El logaritmo de 1, en cualquier base, es 0: $\log_b 1 = 0$, ya que $b^0 = 1$. ()
8. El logaritmo de un número igual a la base es 1: $\log_b b = 1$, ya que $b^1 = b$. ()
9. No existe el logaritmo en cualquier base de un número negativo o cero. ()

III. Resuelve las ecuaciones que proponemos a continuación:

1. $\log_2 x = 4$
2. $\log_4 x = 6$
3. $\log_2(5x - 3) = 5$
4. $\log x + \log 5 = 2$
5. $\log_3 x + \log_3(2x + 3) = 2$
6. $4^x = 166.58$
7. $103^x - 2 = 37$
8. $53^x = 148$

9. Supongamos que para calcular la superficie de un cuerpo se utiliza la siguiente expresión:

$\log A = -2.144 + 0.425 \log m + 0.725 \log h$, donde A representa el área en metros cuadrados, m el peso en kilogramos y h la altura en centímetros. Calcula:

- a) El área de la superficie de una persona que pesa 80 kg y mide 170 cm.
- b) La altura de una persona si se sabe que el área de su superficie es de 2.046 m^2 y su peso es de 90 kg.
- c) El peso de una persona con altura de 152 cm y cuya área de superficie es de 1.56 m^2 .
- d) El área de superficie de una persona que mide 165 cm y pesa 73 kg

10. Un biólogo realiza un estudio sobre las moscas y después de estudiar su crecimiento obtuvo la siguiente expresión:

$$N = 400(1.0247)^t$$

Donde N es el número de moscas y t es el tiempo en días. Suponiendo que el experimento comienza un lunes, ¿cuántas moscas habrá el domingo siguiente?

Es importante que identifiques qué tan claros quedaron los tópicos de este bloque II, por lo que sugerimos que realices el siguiente ejercicio de autoevaluación.



Áreas de mejora	Bueno	Regular	Mejorable	Cómo puedo mejorar
Identificación del problema básico				
Elaboración y diseño de representaciones gráficas				
Uso de procedimientos y expresiones matemáticas				
Obtención de resultados correctos				

**Quiero aprender más**

La invención de los logaritmos (palabra de origen griego: *logos* = tratado, *arithmos* = números), se debe al matemático escocés John Napier, barón de Merchiston (1550-1617), quien se interesó fundamentalmente por el cálculo numérico y la trigonometría.

En 1614 y, tras veinte años de trabajo, publicó su obra *Logarithmorum canonis descriptio*, donde explica cómo se utilizan los logaritmos, pero no relata el proceso que le llevó a ellos.

Un año después, en 1651, el matemático inglés Henry Briggs (1561-1631), visitó a Napier y le sugirió utilizar como base de los logaritmos el número 10. A Napier le agradó la idea y se comprometieron a elaborar las tablas de los logaritmos decimales. Napier muere después de dos años y Briggs se queda con la tarea.

En 1618, Briggs publicó *Logarithmorum Chilias prima*, primer tratado sobre los logaritmos vulgares o de Briggs, cuya base es el número 10. Briggs hizo el cálculo de las tablas de logaritmos de 1 a 200 000 y de 90 000 a 100 000.

En 1620, el hijo de Napier publicó la obra de su padre *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (“Descripción de la maravillosa regla de los logaritmos”), donde se explica el proceso seguido por Napier, mediante la comparación de progresiones y la utilización de unas varillas cifradas, llamadas varillas o regletas de Napier, para llegar a sus resultados sobre los logaritmos.

Las tablas de los logaritmos decimales de Briggs fueron completadas de 1 a 100 000 en 1628 por el matemático Vlacq. Estos resultados fueron muy bien acogidos por el mundo científico del momento, que no dudó en utilizarlos para la resolución de cálculos numéricos. Frecuentemente los científicos en los tiempos de Napier necesitaban multiplicar o dividir números “grandes”. Obviamente, para estos tiempos no había ni calculadoras ni *slide rules*, había que hacer los cálculos a mano.

Este trabajo era tedioso y dado a cometer errores. Napier descubrió un mecanismo que permitía calcular productos, cocientes, raíces y potencias con relativa facilidad. Algo que podemos decir es que dada la popularidad de las tablas de logaritmos de Napier, probablemente él es el principal responsable del punto decimal que usamos hoy en día.

FUENTE: http://www.fisicanet.com.ar/matematica/funciones/ap05_funciones.php [Consulta: 11/12/2014]

Busca en Internet los siguientes conceptos clave:

- a. Función exponencial
- b. Función logarítmica
- c. Situaciones en las cuales se presenta el crecimiento exponencial
- d. Gráfica de la función exponencial y logarítmica
- e. Propiedades de los exponentes
- f. Propiedades de los logaritmos
- g. Cálculo de interés compuesto, crecimiento poblacional y depreciación
- h. Cambio de una expresión exponencial a una logarítmica y viceversa
- i. Ecuaciones exponenciales
- j. Ecuaciones logarítmicas

¿Qué voy a aprender?



BLOQUE VIII

Emplea funciones periódicas

UNIDAD DE COMPETENCIA

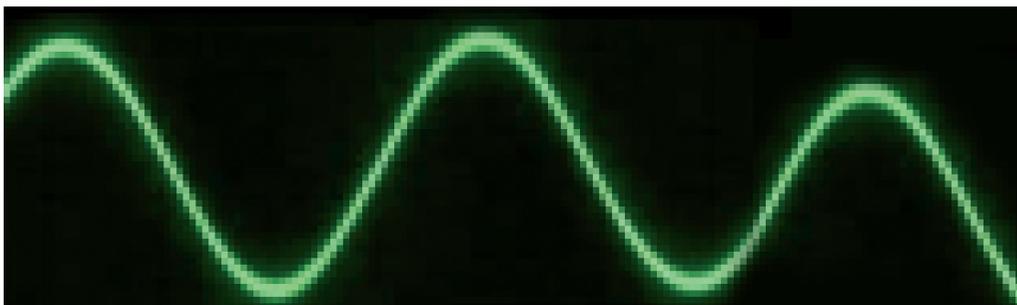
Construye e interpreta modelos periódicos aplicando las propiedades de las funciones senoidales para representar situaciones y resolver problemas, teóricos o prácticos de su vida cotidiana y escolar, que le permiten comprender y transformar su realidad.

Contrasta los resultados obtenidos mediante la aplicación de modelos senoidales, en el contexto de las situaciones reales o hipotéticas que describen.

Interpreta tablas, gráficas, diagramas y textos con información relativa a funciones polinomiales.

Has llegado al último bloque, donde obtendrás casos particulares de las funciones senoidales a partir de modelos generales. Determinarás la amplitud, la fase y la frecuencia de las funciones senoidales particulares.

Distinguirás situaciones en las que es posible aplicar un modelo senoidal para su descripción y estudio, además aplicarás las funciones senoidales en la resolución de problemas.



BLOQUE OCHO



Desarrollando competencias

En general, las funciones senoidales pueden representarse por:

$$y = A \sin(Bx + C)$$

$$y = A \cos(Bx + C)$$

o una combinación de éstas puede ser usada para obtener aprendizajes en los mundos físico, económico, político, artístico y seguramente en muchos otros.



En parejas investiguen los siguientes conceptos relacionados con las funciones senoidales en las fuentes de consulta que tengan a su alcance y escríbanlos donde corresponda.

Amplitud:

Periodo:

Frecuencia:

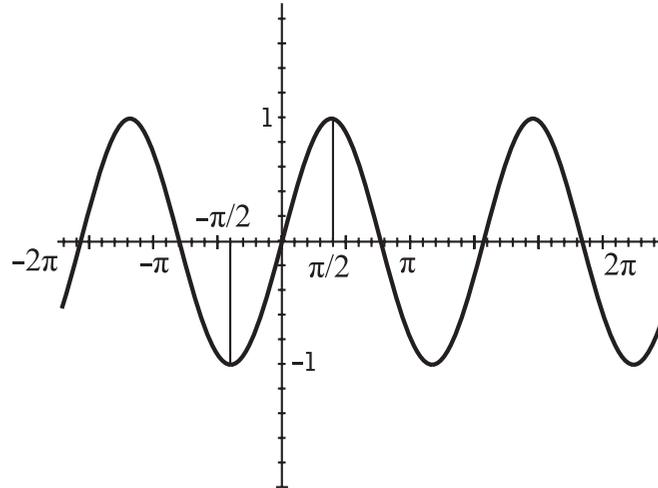
Fase:

Al finalizar, en plenaria comparte la información elaborada en la actividad anterior, y a través de una lluvia de ideas, elaboren una definición grupal de cada uno de los conceptos.

Analiza las siguientes gráficas de las funciones seno y coseno, respectivamente, y contesta las siguientes preguntas:



$f(x) = \sin x$

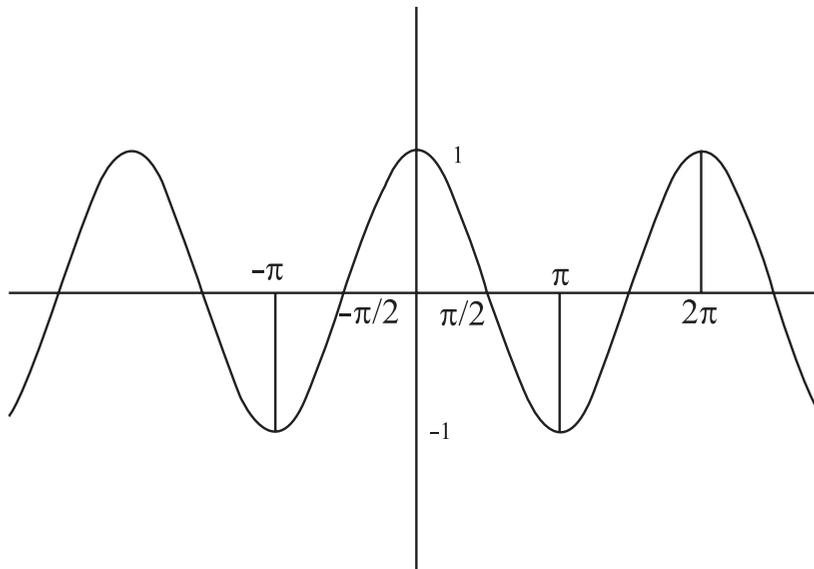


¿Cuál es su periodo? _____

¿Cuál es su amplitud? _____

¿Cuál es su desfase? _____

$f(x) = \cos x$



¿Cuál es su periodo? _____

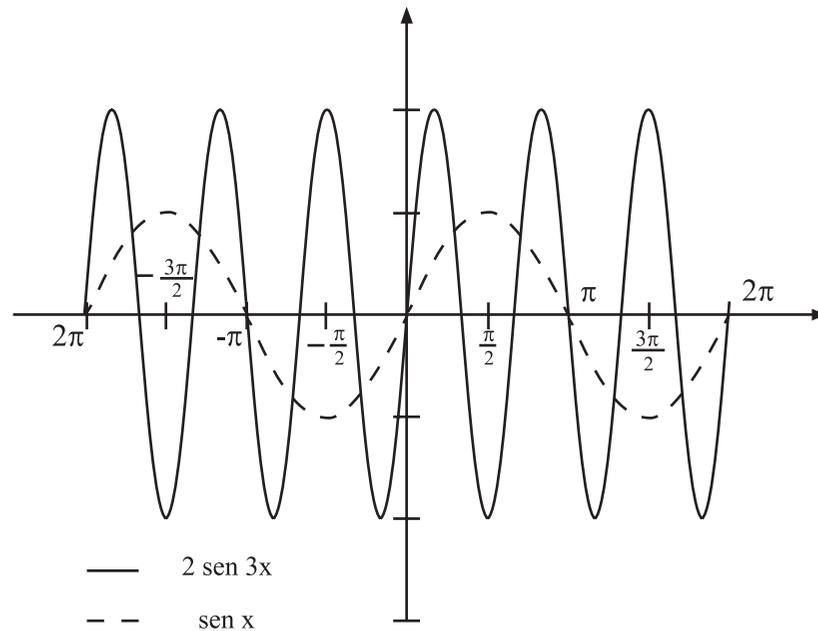
¿Cuál es su amplitud? _____

¿Cuál es su desfase? _____

BLOQUE OCHO

Las funciones anteriores son las funciones senoidales más simples que podemos encontrar. Ahora veamos qué sucede con sus principales elementos y su gráfica cuando son un poco más complejas sus estructuras.

Si tenemos la función $y = 2 \sin 3x$



¿Cuál es su periodo? _____

¿De qué forma obtuviste su periodo? _____

¿Cuál es su amplitud? _____

¿Qué expresión utilizaste para encontrar su amplitud?

¿Cuáles fueron los elementos que afectaron para que su gráfica fuera distinta a la de la función $f(x) = \sin x$? _____

Como te darás cuenta, la función aumentó su amplitud y acortó su periodo, esto es debido a que la amplitud y el periodo son recíprocos, es decir, si uno aumenta el otro disminuye y viceversa.

En parejas, analicen la siguiente función y determinen su periodo, amplitud, desfase y su gráfica.

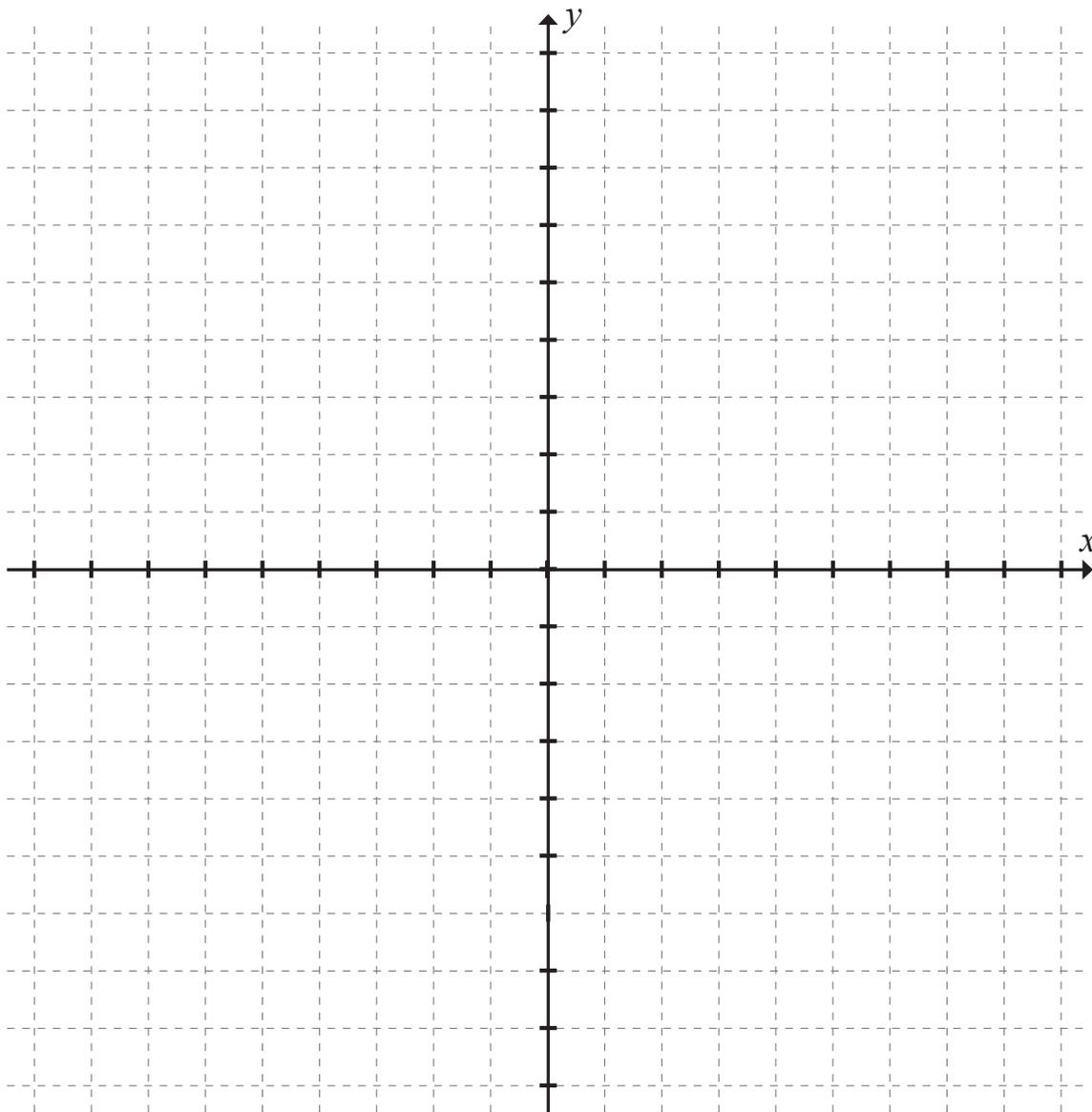
$$y = \frac{1}{2} \cos(x+1)$$



Periodo: _____

Amplitud: _____

Desfase: _____



BLOQUE OCHO

Las funciones senoidales también se pueden usar en problemas de Física o Biología, como en el ejemplo siguiente.

Un tsunami es una ola de marea ocasionada por un terremoto bajo el mar. Estas olas pueden medir más de 100 pies de altura y pueden viajar a grandes velocidades. A veces los ingenieros representan estas olas con expresiones trigonométricas de la forma: $y = a \cos(bt)$ y utilizan estas representaciones para calcular la efectividad de los muros rompeolas.

Supongamos que una ola en el instante $t = 0$ tiene una altura de $y = 25$ pies, viaja a razón de 180 pies por segundo con un periodo de 30 min.

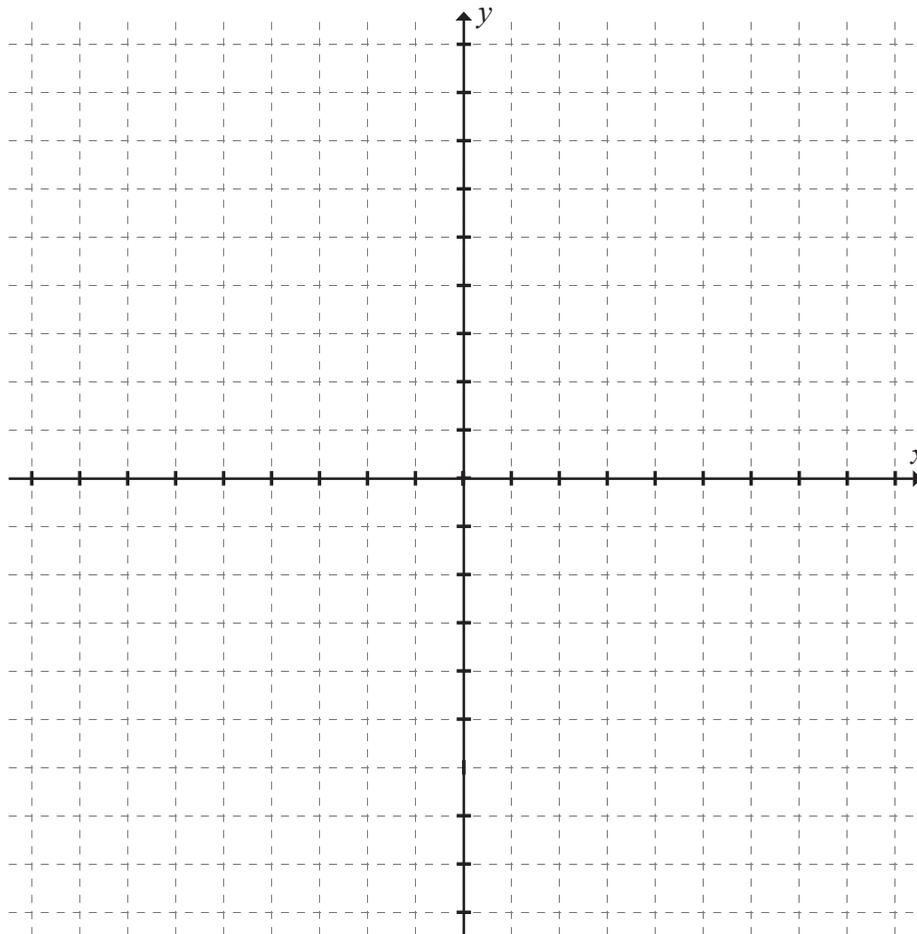
La expresión del movimiento de las olas es: $y = a \cos(bt)$

Como para $t = 0$, $y = 25$ pies, entonces: $25 = a \cos(b \cdot 0)$, así $a = 25$ pies. El periodo es 30 min.

$$\text{Por lo tanto: } \frac{2\pi}{b} = 30 \text{ min} \quad \text{De donde: } b = \frac{\pi}{15}$$

$$\text{La ecuación es: } y = 25 \cos \frac{\pi}{15} t$$

Realiza su gráfica.



Además podemos calcular la distancia entre dos crestas consecutivas:

Como recorre 180 pies en un segundo, recorrerá 10 800 pies en un minuto. La longitud de onda es la distancia entre dos crestas consecutivas, como el periodo es 30 min, en 30 minutos recorrerá: $(1800) (30) = 324 000$ pies.

Fuentes de información



BÁSICA

García L. (2005). *Matemáticas 4 Bachillerato*. México: ST Editorial.

Hostetler, R. (2003). *Álgebra*. México: McGraw-Hill.

Ruiz J. (2005). *Precálculo: funciones y aplicaciones. Matemáticas IV*. México: Publicaciones Cultural.

Sullivan, M. (1997). *Precálculo*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Stewart, J. (2000). *Precálculo*. México: International Thomson Editores.

ELECTRÓNICA

- *Universidad Nacional de Colombia*. Disponible en http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/sedes/fundamentacion/uv00009/lecciones_html/cap5/trigo7.html
[Consulta: 11/12/2014]

- *Mathbas*. Disponible en <http://mathbas.com/funciones.html#23>
[Consulta: 11/12/2014]

BLOQUE OCHO



¿Qué he aprendido?



Las funciones senoidales completan el estudio de este Cuaderno de actividades de aprendizaje y es importante que realices los siguientes ejercicios en parejas.

Determina el periodo, amplitud, desfase y gráfica de las siguientes funciones senoidales.

1. $y = 2\text{sen}x$

2. $y = \cos 3x$

3. $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

4. $y = 2 \cos(2x + \pi)$

5. $y = \frac{1}{3}\text{sen}(4x)$



Al terminar intercambien sus resultados con otra pareja, de tal manera que cada pareja revise un ejercicio distinto al que elaboró.



Ya que has terminado, asignen un punto por cada respuesta correcta que hayan tenido.

Si tienes de 18 a 20 respuestas correctas: ¡Felicidades! Aprendiste bien el tópico.

Si tienes de 15 a 17 respuestas correctas: ¡Bien! Identifica cuáles fueron tus errores y aprende de ellos.

Si tienes menos de 15 respuestas correctas, identifica cuáles fueron tus fallos. Repasa de nueva cuenta el tópico y realiza otra vez el ejercicio con el fin de que puedas ver si conseguiste avanzar.



Expresiones con las funciones seno y coseno

Las funciones trigonométricas permitieron la real incursión del hombre en la naturaleza de los sonidos y lograron que su conocimiento fuera utilizado en el diseño de aparatos como el teléfono, el fonógrafo, la radio, entre otros. Inicialmente el estudio matemático de los sonidos no se realizó con la aplicación de las funciones trigonométricas.

Los pitagóricos descubrieron que la longitud de dos cuerdas igualmente tensionadas y pulsadas levemente, cuyos sonidos armonizaban, están relacionadas por una simple razón aritmética. La menor nota es originada por las cuerdas de mayor longitud. Diseñaron escalas musicales, cuyas notas fueron medidas cuantitativamente por las longitudes de las cuerdas vibrantes porque poseían valores numéricos precisos. Fueron los matemáticos del siglo XVII quienes iniciaron otras investigaciones e hicieron importantes descubrimientos.

Merssene, por ejemplo, estudió el efecto de cambiar la tensión y la masa de la cuerda y encontró que un aumento en la masa y una disminución en la tensión producen notas bajas en una cuerda de longitud dada. Este descubrimiento fue muy importante para instrumentos con cuerdas, como el violín y el piano.

Galileo y Hooke demostraron experimentalmente que cada sonido musical está caracterizado por un número determinado de vibraciones del aire por segundo.

Grandes matemáticos del siglo XVII estudiaron cuerdas vibrantes, como las cuerdas de un violín, y encontraron que las funciones trigonométricas eran adecuadas para representar estas vibraciones. El análisis matemático de las características del sonido se continuó y se llegó a la conclusión de que las Matemáticas eran una herramienta poderosa para el estudio de los sonidos. A pesar de que estos sonidos provengan de diferentes instrumentos y de distintos medios, son descritos por las mismas leyes.

Todos los sonidos musicales son periódicos. Esto es, un sonido musical es un movimiento de moléculas de aire que es repetido muchas veces en un segundo. Estos movimientos periódicos pueden describirse usando las funciones seno o coseno.

Recordemos que la función seno tiene como periodo 2π , esto significa que la función repite su comportamiento en cada intervalo de longitud 2π a lo largo del eje horizontal (tomamos t como variable independiente).

Si t representa el tiempo en segundos, la frecuencia con la cual se repite la gráfica es 1 en 2π segundos.

La función $y = \sin 2t$ tiene las siguientes características: repite su comportamiento dos veces en cada intervalo de longitud 2π o una vez en uno de longitud π . La frecuencia es 2 en cada 2π segundos o 1 en π segundos.

Si $y = \sin((256)(2\pi t))$, y tiene un periodo de $\frac{1}{256}$ y una frecuencia de 256 por segundo. Esta función representa un sonido puro o simple que se repite 256 veces en un segundo. Tal sonido es dado por un diapasón, que está diseñado para vibrar a esta frecuencia.

Los valores de y representan la variación de los desplazamientos de una molécula de aire desde su reposo hasta su posición no perturbada. Pero los sonidos musicales no son simples. Cada sonido musical es una combinación de sonidos simples. Joseph Fourier estableció que todo sonido musical puede ser representado como la suma de funciones trigonométricas simples.

La forma sería:

$$y = a_1 \text{sen} b_1 x + a_2 \text{sen} b_2 x + \dots + a_n \text{sen} b_n x$$

FUENTE: http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/sedes/fundamentacion/uv00009/lecciones_html/cap5/trigo9.html [Consulta: 11/12/2014]

Busca en Internet los siguientes conceptos clave:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a. Funciones trigonométricas seno | f. Representación gráfica de funciones trigonométricas |
| b. Funciones trigonométricas coseno | g. Características de las funciones periódicas de amplitud |
| c. Funciones circulares seno | h. Características de las funciones periódicas de frecuencia |
| d. Funciones circulares coseno | i. Características de las funciones periódicas de periodo |
| e. Formas senoidales | |



SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
DIRECCIÓN GENERAL DEL BACHILLERATO